



چهارشنبه ۷ جولای ۲۰۱۰

سوال ۱. تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که تساوی

$$f(|x|y) = f(x)|f(y)|$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. (در این جا منظور از $|z|$ بزرگترین عدد کوچکتر یا مساوی با z است.)

سوال ۲. فرض کنید I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و Γ دایره محیطی آن باشد. خط AI دایره

Γ را بار دیگر در D قطع می کند. فرض کنید E نقطه ای روی کمان \widehat{BDC} و F نقطه ای روی ضلع BC باشند به طوری که

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{4}\angle BAC$$

همچنین G را نقطه وسط پاره خط IF بگیرید. ثابت کنید خطوط DG و EI روی دایره Γ یکدیگر را قطع می کنند.

سوال ۳. \mathbb{N} مجموعه اعداد صحیح مثبت است. تمام توابع $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را بیابید که

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ یک مربع کامل باشد.



پنج شنبه ۸ جولای ۲۰۱۰

سوال ۴. فرض کنید P نقطه ای درون مثلث ABC باشد. خطوط AP ، BP و CP به ترتیب دایره Γ محیطی از مثلث ABC را بار دیگر در نقاط K ، L و M قطع می کنند. خط مماس بر دایره Γ در نقطه C خط AB را در S قطع می کند. فرض کنید $SC = SP$. ثابت کنید $MK = ML$.

سوال ۵. در هر یک از شش صندوق $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ در ابتدا یک سکه قرار دارد. دو نوع حرکت زیر مجاز است:

حرکت نوع ۱: یک صندوق B_j را انتخاب کنید که خالی نباشد و $1 \leq j \leq 5$. یک سکه از B_j بردارید و دو سکه به B_{j+1} اضافه کنید.

حرکت نوع ۲: یک صندوق B_k را انتخاب کنید که خالی نباشد و $1 \leq k \leq 4$. یک سکه از B_k بردارید و محتوای صندوق های B_{k+1} و B_{k+2} (که می توانند خالی هم باشند) را با هم عوض کنید.

آیا می توان با دنباله ای متناهی از حرکات بالا به وضعیتی رسید که صندوق های B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 خالی باشند و در صندوق B_6 دقیقاً $2010^{2010} \cdot 2010$ سکه باشد؟ (توجه کنید که $a^{b^c} = (a^b)^c$.)

سوال ۶. فرض کنید a_1, a_2, a_3, \dots دنباله ای داده شده از اعداد حقیقی مثبت باشد. فرض کنید به ازای یک عدد طبیعی s ، تساوی

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

برای هر $n > s$ برقرار باشد. ثابت کنید اعداد طبیعی l و N وجود دارند که $l \leq s$ و برای هر $n \geq N$ داشته باشیم $a_n = a_l + a_{n-l}$.

Language: Persian (Farsi)

زمان: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

هر سوال ۷ نمره دارد