

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی ایران دوم بهمن ماه هشتاد و هشت

ویرایش و پاسخ :

مهندس احمد نوری رنجبر

مهندس محمد شریفی

توضیح: متن تمام سوالات حروف چینی مجدد، ویرایش و بازبینی شده است، اما امکان اشتباه وجود دارد و لذا از تمام اساتید محترم و دانش آموزان عزیز درخواست می شود اشتباهات این متن را از طریق قسمت «تماس با ما» در سایت www.IRYSC.com یا ایمیل info@irysc.com اعلام فرمایند تا در اسرع وقت تصحیح شود.

خلینا - ۱۳۸۸/۱۱/۲

مرجع آموزش المپیادهای علمی ایران

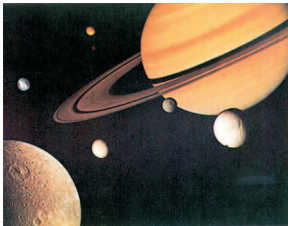
www.IRYSC.com

(1) IRYSC.COM دایره‌ای به شعاع واحد را در نظر بگیرید. مساحت این دایره به مساحت چند مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد نزدیک‌تر است؟

الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

(2) IRYSC.COM فرض کنید حاصل ضرب همه‌ی اعداد داخل جدول ضرب 10×10 برابر n باشد. بزرگ‌ترین عدد m که $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی باشد چند است؟

الف) ۲ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۲۰ (ه) ۴۰



(3) IRYSC.COM دانشمندان، منظومه‌ای در کهکشان راه شیری کشف کرده‌اند که دارای یک ستاره، ۹ سیاره و ۱۲۲ قمر است و هر سیاره‌ی آن دست‌کم یک قمر دارد. تحقیقات نشان می‌دهد که جرم ستاره برابر 1.98×10^{30} kg است و مجموع جرم سیاره‌ها برابر جرم ستاره و مجموع جرم قمرهای هر سیاره برابر جرم آن سیاره است. میانگین جرم اجرام این منظومه چه قدر است؟

الف) 1.5×10^{28} kg (ب) 4.5×10^{28} kg (ج) 6.6×10^{28} kg (د) 5.94×10^{28} kg (ه) اطلاعات موجود کافی نیست.

(4) IRYSC.COM چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میله‌ی اول به انتهای میله‌ی چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصله‌ی لولای بین میله‌های ۵ متری و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟

الف) هر مقدار بین ۳ و ۸ متر
ب) هر مقدار بین ۲ و ۱۱ متر
ج) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر
د) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر
ه) هر مقدار بین ۲ و ۳ متر و هر مقدار بین ۸ و ۱۱ متر

(5) IRYSC.COM یک امتحان ۱۰۰ نمره‌ای از دانش‌آموزان دو کلاس «الف» و «ب» گرفته شده است. هر کلاس ۵۰ دانش‌آموز دارد. پس از اعلام نتایج، مشخص شد که میانگین نمرات کلاس «الف» از میانگین نمرات کلاس «ب» بیش‌تر است. حداکثر چند دانش‌آموز در کلاس «ب» هستند که نمره‌ی آن‌ها از همه‌ی دانش‌آموزان کلاس «الف» بیش‌تر است؟

الف) ۱
ب) ۲۵
ج) ۴۹
د) ۵۰

ه) امکان ندارد دانش‌آموزی از کلاس «ب»، نمره‌اش از همه‌ی دانش‌آموزان کلاس «الف» بیش‌تر باشد.



(6) IRYSC.COM مهندس ناظر تونل توحید در اولین شنبه بعد از آغاز کار، از پروژه‌ی تونل توحید بازدید کرده است. از آن روز به بعد برنامه‌ی بازدید وی از تونل به این شکل بوده است: فردای همان روز، یعنی یکشنبه، از پروژه مجدداً بازدید کرده و در ادامه هر بار یک روز به فاصله‌ی بین بازدیدها اضافه کرده است. صدمین بازدید در چه روزی از هفته انجام شده است؟

الف) شنبه (ب) یکشنبه (ج) دوشنبه (د) سه‌شنبه (ه) چهارشنبه

(۷) **IRYSC.COM** شخصی در اصفهان زندگی می کند و می خواهد از سه شهر تبریز، مشهد و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان بازگردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه‌ی بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می تواند این سفر را انجام دهد؟

(الف) ۳۶ (ب) ۷۲ (ج) ۱۰۸ (د) ۱۲۰ (ه) ۲۱۶

(۸) **IRYSC.COM** چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که حاصل ضرب ارقامش ۹۸۰۰ باشد؟

(الف) ۱۶۸۰ (ب) ۵۰۴۰ (ج) ۸۴۰۰ (د) ۱۰۰۸۰ (ه) ۱۲۰۹۶۰

(۹) **IRYSC.COM** فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

(الف) دست کم یکی از a^3 و $a^4 - 1$ گنگ است.

(ب) دست کم یکی از $a^3 - 1$ و a^6 گنگ است.

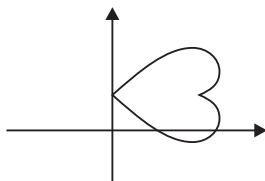
(ج) دست کم یکی از a^2 ، a^3 و a^5 گویا است.

(د) a^2 و $a^3 - 1$ گنگ هستند.

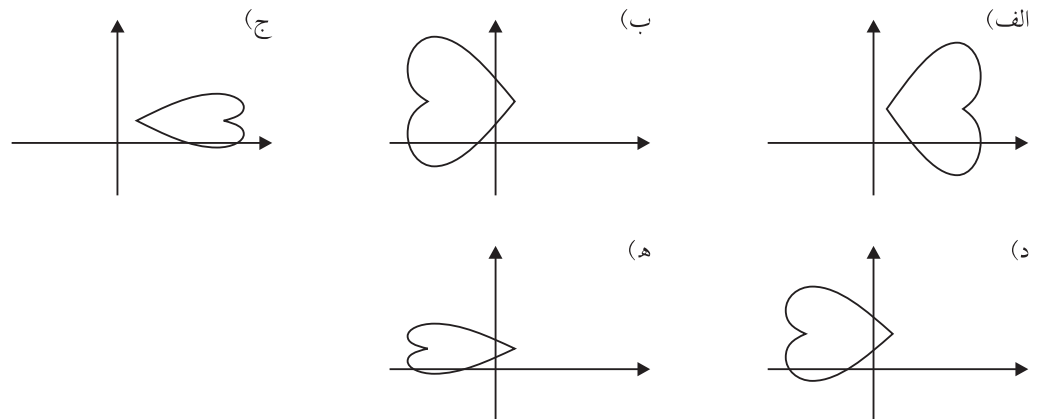
(ه) حداکثر یکی از $a^2 + 1$ و a^4 گنگ است.

(۱۰) **IRYSC.COM** تعداد اعداد طبیعی بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ که عامل اولی به غیر از ۲ و ۳ نداشته باشند چند تا است؟

(الف) ۶ (ب) ۹ (ج) ۱۴ (د) ۲۰ (ه) ۸۳۳



(۱۱) **IRYSC.COM** $f(x, y)$ تابعی دو متغیره است و شکل روبه‌رو مجموعه‌ی نقاط (x, y) در صفحه است که $f(x, y) = 0$. مجموعه‌ی نقاط (x, y) که $f(1-x, 2y) = 0$ کدام گزینه است؟



(۱۲) **IRYSC.COM** ظرفی مکعب شکل به ضلع ۶ سانتی متر را تا نصفه پر از آب کرده‌ایم. اگر این ظرف را به آرامی طوری کج کنیم که یک ضلع کف روی زمین بماند و کف آن با زمین زاویه‌ی 60° درجه بسازد، چند سانتی متر مکعب آب بیرون می ریزد؟

(الف) $108 - 36\sqrt{3}$ (ب) $216 - 12\sqrt{3}$ (ج) $108 - 9\sqrt{3}$ (د) $216 - 18\sqrt{3}$ (ه) اصلاً آبی نمی ریزد.

(۱۳) **IRYSC.COM** معادله‌ی $y^2 - 2x^2 = 1388$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند جواب دارد؟

(الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) بی نهایت

14) IRYSC.COM چند عدد چهار رقمی وجود دارد که هر رقم آن از سمت چپش کوچکتر باشد و اگر ترتیب ارقام را برعکس کنیم، تفاضل این دو عدد ۶۱۷۴ شود؟

- الف) ۱ (ب) ۸ (ج) ۱۰ (د) ۱۲ (ه) ۲۱

15) IRYSC.COM فرض کنید مقدار تابع $f(x) = -x^2 + bx + c$ همواره کمتر یا مساوی ۲ باشد. اگر این تابع دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، فاصله‌ی ریشه‌های آن حداکثر چه قدر است؟

- الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۸ (د) $\sqrt{2}$ (ه) $2\sqrt{2}$

16) IRYSC.COM می‌گوییم یک عدد در مبنای a کاهشی است در صورتی که اگر آن را در مبنای a بنویسیم، هیچ رقمی از رقم سمت چپ خود بزرگتر نباشد. چند عدد طبیعی کوچکتر از 1024 وجود دارد که هم در مبنای ۲ و هم در مبنای ۴ کاهشی باشد؟

- الف) ۱۰ (ب) ۳۰ (ج) ۳۵ (د) ۴۰ (ه) ۵۵

17) IRYSC.COM چند زوج مرتب (x, y) از اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۱ وجود دارد که $2x + 7y$ بر $x + y$ بخش پذیر باشد؟

- الف) ۵۰ (ب) ۷۸ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۱۶ (ه) ۲۰۰

18) IRYSC.COM ضلع AB ، از مثلث ABC را از طرف B به اندازه‌ی خودش تا P ادامه می‌دهیم. ضلع AC را هم از طرف C به اندازه‌ی دو برابر خودش تا نقطه‌ی Q امتداد می‌دهیم. اگر M وسط PQ باشد، مساحت مثلث MBC چند برابر مثلث ABC است؟

- الف) ۱ (ب) $1/25$ (ج) $1/5$ (د) $1/75$ (ه) ۲

19) IRYSC.COM می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را بدون تکرار، در جدول زیر بنویسیم به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد پایینش کوچکتر باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟

- الف) ۳۴ (ب) ۳۵ (ج) ۳۶ (د) ۴۴ (ه) ۴۵

20) IRYSC.COM فرض کنید عدد طبیعی n روی تخته سیاه نوشته شده است. این عدد را پاک می‌کنیم و به جای آن عدد $2^a - 2^b + n$ را می‌نویسیم که در آن a بزرگترین عددی است که n به 2^a بخش پذیر است و b کوچکترین عددی است که $n < 2^b$. اگر در ابتدا عدد ۴۲ نوشته شده باشد، بعد از ۱۱۳ بار انجام این کار چه عددی روی تخته خواهد بود؟

- الف) 7×2^{116} (ب) $2^{117} \times 184$ (ج) 9×2^{117} (د) $2^{113} \times 42$ (ه) $2^{118} \times 184$

21) IRYSC.COM فرض کنید ABC یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشد که AB وتر آن است. مورچه‌ای داخل مثلث است. وی ابتدا به سمت نقطه‌ی A می‌رود تا جایی که فاصله‌اش از آن نقطه نصف شود. سپس به سمت نقطه‌ی B می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود و این دو حرکت را متناوباً تکرار می‌کند. بعد از ۲۰ مرحله انجام این کار، مورچه به کدام نقطه نزدیکتر است؟

- الف) A (ب) B (ج) C
 د) وسط وتر AB (ه) بستگی به مکان اولیه‌ی مورچه دارد.



(۲۲) **IRYSC.COM** در یک ستون ۲۵۷ سرباز ایستاده‌اند. فرمانده دستور می‌دهد که نفراتی که در مکان‌های فرد قرار گرفته‌اند به همان ترتیب از صف خارج شوند، نفرات دیگر با حفظ ترتیب جای آن‌ها را پر کنند و در نهایت نفرات خارج شده از صف به همان ترتیب به انتهای صف بروند. اگر فرمانده ۴۱ مرتبه‌ی دیگر این دستور را تکرار کند، سربازی که در نهایت نفر اول صف شده در ابتدا چندم بوده است؟

الف) ۱ (ب) ۱۶ (ج) ۱۲۸ (د) ۲۵۳ (ه) ۲۵۵

(۲۳) **IRYSC.COM** به چند صورت می‌توان یک چند جمله‌ای از درجه‌ی پنج ساخت که ضرایب آن، با ترتیبی دلخواه، اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۶ باشد و به علاوه به چند جمله‌ای $1 + x + x^2$ بخش پذیر باشد؟
(بخش پذیر بودن یک چند جمله‌ای به چند جمله‌ای $1 + x + x^2$ یعنی آن را بتوان به صورت ضرب چند جمله‌ای $1 + x + x^2$ و یک چند جمله‌ای دیگر نوشت.)

الف) ۱ (ب) ۴۸ (ج) ۱۲۰ (د) ۳۶۰ (ه) چنین چندجمله‌ایی وجود ندارد.

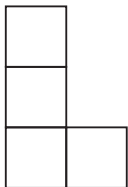
(۲۴) **IRYSC.COM** بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ ، داشته باشیم:

$$a^3 - \frac{1}{a^3} \geq k \left(a - \frac{1}{a} \right)$$

الف) ۲ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) ۴ (د) $4\sqrt{3}$ (ه) ۵

(۲۵) **IRYSC.COM** تویی به شعاع ۲۰ سانتی متر روی سطح زمین قرار دارد. بالاترین نقطه‌ی توپ را علامت می‌زنیم. پس از آن توپ را به اندازه‌ی 25π سانتی متر به سمت شرق و سپس به اندازه‌ی 25π سانتی متر به سمت شمال می‌غلطانیم. در نهایت ارتفاع علامت از سطح زمین چند سانتی متر است؟

الف) $20 - 10\sqrt{3}$ (ب) ۲۰ (ج) $20 + 5\sqrt{3}$ (د) $20 + 10\sqrt{3}$ (ه) ۳۰



(۲۶) **IRYSC.COM** به چند طریق می‌توان جدول 1388×1388 را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد به طوری که اگر کاشی به شکل روبه‌رو را بر روی چهار خانه از جدول قرار دهیم، مجموع چهار عدد زیر کاشی مضربی از ۶ باشد؟ (کاشی را می‌توان چرخاند یا پشت و رو کرد.)

الف) ۸ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۶ (ه) ۲۰

(۲۷) **IRYSC.COM** کدام گزینه درباره‌ی سه عدد زیر صحیح است؟ در عبارتی که برابر A است ۵۰۰ بار ۲ و ۵۰۰ بار ۴ ظاهر شده است و در عبارتی که برابر B است نیز همین‌طور است. در عبارتی که برابر C است ۲۰۰۰ بار ۲ ظاهر شده است.

$$C = 2^{2000} \dots 2 \quad B = 4^{2000} \dots 4 \quad A = 2^{4000} \dots 4$$

الف) $A > B > C$ (ب) $B > A > C$ (ج) $C > A > B$ (د) $C > B > A$ (ه) $B > C > A$

(۲۸) **IRYSC.COM** در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، $\angle DAB = 110^\circ$ ، $\angle BCD = 125^\circ$ و $AB = AD = 6$. طول قطر AC چه قدر است؟

الف) ۵ (ب) ۵/۵ (ج) ۶ (د) ۶/۵ (ه) اطلاعات کافی نیست.

(۲۹) **IRYSC.COM** یک جورچین (پازل) ساده از ۱۰ قطعه‌ی مربعی شکل تشکیل شده است که باید در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند تا تصویری مشخص را درست کنند. فرض کنید مکان‌های سوم و هشتم به درستی پر شده است و از این به بعد در هر مرحله تنها مجازیم قطعه‌ای را سرجایش قرار دهیم که دست کم یکی از قطعات مجاورش قبلاً جای گذاری شده باشد. به چند روش مختلف می توان ۸ قطعه‌ی باقی مانده را سرجایشان گذاشت؟

الف) ۱۶۸۰ (ب) ۳۳۶۰ (ج) ۴۲۰۰ (د) ۵۰۴۰ (ه) ۱۰۰۸۰

(۳۰) **IRYSC.COM** حداکثر چند دایره در فضا می توان قرار داد به طوری که هر دو تا همدیگر را در دو نقطه قطع کنند، هیچ سه تایی از یک نقطه عبور نکنند و هیچ دو تایی در یک صفحه قرار نداشته باشند؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۱۲ (ه) بی نهایت

دانش آموزانی که در آزمون‌های آنلاین مجازی سایت المپیادهای علمی ایران در سال ۱۳۸۸ در رشته‌های ریاضی، فیزیک و شیمی شرکت کرده بودند، همگی بر این باور هستند که نکات تمام سوالات مرحله‌ی اول آزمون‌های این رشته‌ها در سال ۱۳۸۸ در آزمون‌های آزمایشی سایت مطرح شده بود. به امید خدا در پاییز سال ۱۳۸۹ منتظر آزمون‌های آنلاین آزمایشی در رشته‌های جدید نیز باشید.

کلید مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی ایران

بهمن ماه هشتاد و هشت

۱۶	الف	ب	ج	د	ه
۱۷	الف	ب	ج	د	ه
۱۸	الف	ب	ج	د	ه
۱۹	الف	ب	ج	د	ه
۲۰	الف	ب	ج	د	ه
۲۱	الف	ب	ج	د	ه
۲۲	الف	ب	ج	د	ه
۲۳	الف	ب	ج	د	ه
۲۴	الف	ب	ج	د	ه
۲۵	الف	ب	ج	د	ه
۲۶	الف	ب	ج	د	ه
۲۷	الف	ب	ج	د	ه
۲۸	الف	ب	ج	د	ه
۲۹	الف	ب	ج	د	ه
۳۰	الف	ب	ج	د	ه
۱	الف	ب	ج	د	ه
۲	الف	ب	ج	د	ه
۳	الف	ب	ج	د	ه
۴	الف	ب	ج	د	ه
۵	الف	ب	ج	د	ه
۶	الف	ب	ج	د	ه
۷	الف	ب	ج	د	ه
۸	الف	ب	ج	د	ه
۹	الف	ب	ج	د	ه
۱۰	الف	ب	ج	د	ه
۱۱	الف	ب	ج	د	ه
۱۲	الف	ب	ج	د	ه
۱۳	الف	ب	ج	د	ه
۱۴	الف	ب	ج	د	ه
۱۵	الف	ب	ج	د	ه