



www.irysc.com

مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران

نهم و دهم اردیبهشت هشتاد و نه

پاسخ سوالات:

محمد شریفی

سیامک احمدپور

یاسر احمدی فولادی

پاسخ‌دهی این آزمون برای افزایش بنیه علمی دانش آموزان ایرانی و به صورت رایگان انجام شده است.
کلیه حقوق برای مؤلفان و سایت المپیادهای علمی ایران می‌باشد.

روز اول

(۱) **IRYSC.COM** a و b دو عدد طبیعی اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - 1$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + 1$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab + 1)^2 + (a - b)^2$ مربع کامل نیست.

(۲) **IRYSC.COM** n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک استقامت نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{1}{4}(n^2 - n)$ بیش تر نیست.

(۳) **IRYSC.COM** دایره‌های W_1 و W_2 در P و D متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی W_1 و W_2 هستند به طوری که AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی W_2 را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید

$$\angle DPM = \angle BDC$$

روز دوم

(۴) **IRYSC.COM** ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عددهایی حقیقی اند و

$$\min\{b, b + d\} > \max\{|c|, |a + c|\}$$

ثابت کنید معادله‌ی $P(x) = 0$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ جواب ندارد.

(۵) **IRYSC.COM** در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

(۶) **IRYSC.COM** مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت‌نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت‌نام کرده‌اند. می‌دانیم اگر دو کلاس مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n - 1)^2$ بیش تر نیست.

پاسخ‌ها

(1) **IRYSC.COM** توجه کنید که

$$(a-b)^2 + (ab+1)^2 = (a+b)^2 + (ab-1)^2 = (a^2+1)(b^2+1).$$

اگر a^2+1 و b^2+1 عامل اول مشترکی مانند p داشته باشند، آن‌گاه

$$p \mid (a^2+1) - (b^2+1) = (a-b)(a+b)$$

بنابراین $p \mid a \pm b$ (به ازای یکی از انتخاب‌های $+$ و $-$). بنابراین

$$p \mid a(a \pm b) - (a^2+1) = \pm ab - 1 \Rightarrow p \mid ab \mp 1 \Rightarrow p \mid (a \pm b, ab \mp 1)$$

که با فرض مسئله در تناقض است. بنابراین $(a^2+1, b^2+1) = 1$. حال اگر $(a^2+1)(b^2+1)$ مربع کامل شود، هریک از اعداد a^2+1 و b^2+1 باید مربع کامل شوند، که غیر ممکن است؛ زیرا $a^2 < a^2+1 < (a+1)^2$.

(2) **IRYSC.COM** دو نقطه‌ی A و B را در نظر بگیرید. از آن‌جا که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست قرار ندارند، در هر یک از دو سوی خط AB ، حداکثر دو نقطه مانند C وجود دارند که مثلث ABC مساحت ۱ داشته باشد. پس برای هریک از $(\frac{2}{3})$ انتخاب دو نقطه برای A و B ، حداکثر ۴ مثلث ABC با مساحت ۱ به دست می‌آیند. هر چنین مثلث ABC ای سه بار به خاطر سه رأس شمرده می‌شود. پس، حداکثر $\frac{4}{3}(\frac{2}{3})$ مثلث با مساحت ۱ می‌توانند وجود داشته باشند.

(3) **IRYSC.COM** فرض کنید خط PD ، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی L قطع کند. طبق قوت نقطه‌ی L نسبت به دو دایره،

$$LA^2 = LD \cdot LP = LB^2$$

بنابراین L نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB است.دو مثلث PCB و PBA متشابه‌اند؛ زیرا

$$\angle PCB = \frac{1}{2} \angle PDB = \angle PBA, \quad \angle PBC = \frac{1}{2} \widehat{PC} = \angle PDC = \frac{1}{2} \widehat{ADP} = \angle PAB$$

از تشابه دو مثلث و این‌که PM و PL میانه‌های دو مثلث‌اند، نتیجه می‌گیریم دو مثلث PLB و PMC متشابه‌اند. بنابراین

$$\angle CPM = \angle BPL \Rightarrow \angle CPB = \angle MPD$$

از طرفی $\angle MPD = \angle CDB$ در نتیجه $\angle CPB = \frac{1}{2} \widehat{CB} = \angle CDB$.(4) **IRYSC.COM** با توجه به فرض مسئله، $b, b+d > 0$. فرض کنید $x \in [-1, 1]$ ریشه‌ای از این معادله باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= |ax^3 + bx^2 + cx + d| \geq |bx^2 + d| - |ax^3 + cx| \\ &= (b+d)x^2 + d(1-x^2) - \left| x \left((a+c)x^2 + c(1-x^2) \right) \right| \\ &\geq (b+d)x^2 + d(1-x^2) - \left| (a+c)x^2 + c(1-x^2) \right| \\ &\geq (b+d)x^2 + d(1-x^2) - \left(|a+c|x^2 + |c|(1-x^2) \right) \\ &\geq \min\{b, b+d\}(x^2+1-x^2) - \max\{|a+c|, |c|\}(x^2+1-x^2) \\ &= \min\{b, b+d\} - \max\{|a+c|, |c|\} > 0. \end{aligned}$$

که غیر ممکن است. (توجه کنید که در نابرابری‌های بالا از نابرابری مثلث، و این‌که $b, b+d > 0$ و $1-x^2 \geq 0$ استفاده کرده‌ایم.)

(۵) IRYSC.COM نقطه‌ی برخورد دو خط CE و BF را O می‌نامیم. فرض کنید

$$\angle BEC = \angle BCE = \frac{1}{4}\angle ABC = \alpha, \quad \angle CBF = \angle CFB = \frac{1}{4}\angle ACB = \beta$$

بنابراین $\alpha + \beta = 60^\circ$ و نتیجتاً $\angle BOC = 120^\circ$. پس چهارضلعی $ABOC$ محاطی است. در نتیجه

$$\angle OAC = \angle OBC = \beta, \quad \angle OAB = \angle OCB = \alpha$$

$$\Rightarrow OA = OE = OF \Rightarrow \angle OEF = \angle OFE = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KAC = \frac{1}{4}\widehat{KC} = \angle KEC = 30^\circ \Rightarrow \angle EAK = \angle FAK = 30^\circ$$

(۶) IRYSC.COM a_k را بیشینه‌ی شمار زیرمجموعه‌های k عضوی، $k \geq 2$ ، بگیرید. هیچ دو زیرمجموعه‌ی k عضوی‌ای نمی‌توانند دو عضو مشترک داشته باشند. پس، همه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی زیرمجموعه‌های k عضوی، گوناگون هستند. به این ترتیب، نابرابری‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\binom{k}{2} a_k \leq \binom{n}{2};$$

$$a_k \leq \frac{n(n-1)}{k(k-1)}, \quad n \geq 2$$

با جمع بستن a_k ها برای k از ۲ تا n ، شمار بیشینه‌ی خواسته شده به دست می‌آید:

$$\sum_{k=2}^n a_k \leq \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)}{k(k-1)} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = n(n-1) \left(1 - \frac{1}{n} \right) = (n-1)^2$$