

دفترچه سؤالات مرحله اول

سی و ششمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۵	۳۰	۲۴۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- ۱- کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه‌ی سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
- ۹- وبگاه کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.



۱- به چند طریق می توان اعداد ۱، ۲، ... و ۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش پذیر باشد؟

۱۰ (۵)

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)



۲- جناب خان می خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه رقمی است و جناب خان مایل است ارقام متمایز باشند و به علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کم تر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفته اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)

۱۶ (۵)

۱۹ (۴)

۲۰ (۳)

۲۴ (۲)

۲۸ (۱)

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n+1}$$

۳- تابع $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m, n) = 1$:

که منظور از (m, n) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام یک از گزاره های زیر درباره تابع f درست است؟

(۱) تابع f یک به یک است. (۲) تابع f یک نوا (صعودی یا نزولی) است.

(۳) برد تابع f تمام اعداد گویا است. (۴) به ازای هر $m \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$.

(۵) همه گزینه ها صحیح هستند.

۴- مثلث قائم الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = 90^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره ای به مرکز A طوری رسم می کنیم که ضلع AB را در D ، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطه E و M قطع کند که نقطه E بین نقاط D و M است. می دانیم M وسط ضلع BC است و هم چنین نسبت طول کمان های DE به EM به MF برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدر مطلق تفاضل دو زاویه حاده مثلث ABC چه قدر است؟

۱۰° (۵)

۳۰° (۴)

۴۵° (۳)

۵۰° (۲)

۷۰° (۱)



محاسبات و نکته های مهم



۵- با استفاده از همه ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

- (۱) ۳۴۵ (۲) ۱۹۸ (۳) ۹۱۲ (۴) ۳۹۸ (۵) ۳۱۲

۶- برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ (\mathbb{Q}' نماد مجموعه اعداد گنگ است.)

• $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$

• $\{\sqrt{2}, 5\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$

• $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

• $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\}$

- (۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک (۵) صفر

۷- چند عدد سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار

۸- چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش پذیر باشد؟

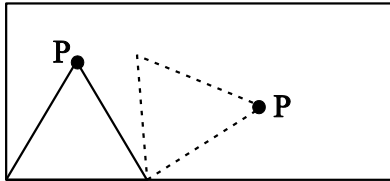
- (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۲ (۵) ۱۵۶

۹- اعداد ۱، ۲، ... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همه مقسوم‌علیه‌های آن را به ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همه اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۴۱ (۳) ۶۹۸ (۴) ۷۰۱ (۵) ۷۰۳



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۰- مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل 2×4 ، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟

(۵) 2π

(۴) $\frac{7\pi}{3}$

(۳) 4π

(۲) 3π

(۱) $\frac{10\pi}{3}$

۱۱- عمل $*$ را در مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{1-xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ باشند. مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

(۵) -2

(۴) $\frac{8}{3}$

(۳) -8

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) 2

۱۲- a, b, c اعدادی دو به دو متمایزند. می‌دانیم سه معادله درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad bx^2 + cx + a = 0, \quad cx^2 + ax + b = 0$$

مقدار آن ریشه مشترک چند است؟

(۳) -1

(۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(۱) 0

(۵) به طور یک تا تعیین نمی‌شود.

(۴) 1

۱۳- تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b, c) = b(c, a) = c(a, b) = 2^6 \times 3^8 \times 5^{10}$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است.)

(۵) 720

(۴) 1620

(۳) 2000

(۲) 2080

(۱) 3240



محاسبات و نکته‌های مهم

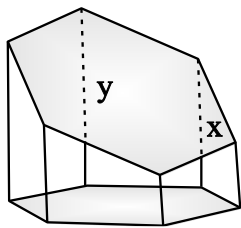


۱۴- ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبه دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

- (۱) ۹۰ و ۵۰ (۲) ۱۰۰ و ۵۰ (۳) ۸۰ و ۹۰ (۴) ۸۰ و ۱۰۰ (۵) ۹۰ و ۱۰۰

۱۵- می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳، عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جاییش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

- (۱) ۳۶ (۲) ۱۴۴ (۳) ۳۲۴ (۴) ۹۲۴ (۵) ۷۴۸۴۴۰۰



۱۶- یک منشور قائم با قاعده شش ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصله رئوس این سطح مقطع تا قاعده پایین به ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد $x + y + z$ چه قدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵) ۲۶

۱۷- چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ 2x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶

۱۸- چند زوج مرتب (m, n) از اعداد طبیعی داریم که $[1, 2, \dots, m] = 1395 \times [1, 2, \dots, n]$. (منظور از نماد $[1, 2, \dots, m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1, 2, \dots, m$ است.)

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار



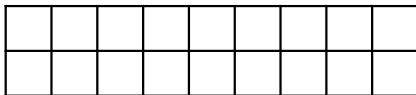
محاسبات و نکته‌های مهم



۱۹- در شهر ساده لوحان شایعه‌ها به سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آن که تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

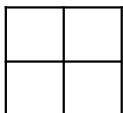
- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۵۰۰۰۰۰ (۵) ۵۲۴۲۸۸

۲۰- خیابان کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همه تقاطع‌ها سرکشی کند به طوری که از تقاطع راست- بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست- بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟



- (۱) ۳۵ (۲) ۳۵ (۳) 2×3^4 (۴) ۲۴ (۵) $3^5 - 3^6$

۲۱- خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است). هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟



- (۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیش‌تر از تقاطع‌های دیگر است.
 (۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
 (۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
 (۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست‌کم ۹ خودرو پارک شده است.
 (۵) گزینه‌های ۱ و ۴.





۲۲- مثلث ABC مفروض است. فرض کنید w_b و w_c به ترتیب دو دایره گذرنده از A باشند به طوری که به ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایره مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این و خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = ۸$ و $AN = ۶$. حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

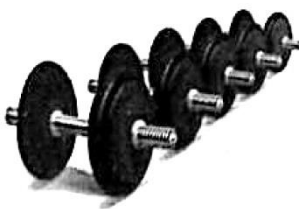
۲۰۰ (۵)

۱۵۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۸۱ (۲)

۶۴ (۱)



۲۳- در مسابقه قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همه وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنه ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آن جا قرار می‌دهد، سپس از آن جا وزنه ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و

همین روند ادامه می‌یابد. پس از آن که وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آن جا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

۲۰۱۸۰ (۳)

۲۰۲۰۰ (۲)

۲۰۲۸ (۱)

۲۰۰۸۰ (۵)

۲۰۱۰۰ (۴)

۲۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم $\angle ABC = 60^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیریم که $BE = 2AE$. به علاوه F را هم قرینه E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۰/۶ (۵)

۰/۵ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۲ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



۲۵- برای زیر مجموعه ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $t > 0$ ، مجموعه نقاطی که از دست کم یک نقطه A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی t دارند را با A_t نمایش می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همه موارد t و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیر مجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_t)_s = (A_s)_t$.
- $B \subset A_t$ اگر و تنها اگر $A \subset B_t$.
- اگر برای هر $t > 0$ ، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_t = A_t \cup B_t$.
- اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_t = A_t \cap B_t$.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار (۵) پنج

۲۶- بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e :

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 \geq k(b-d)^2$$

(۱) ۱ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۲ (۵) $\frac{5}{6}$

۲۷- در مثلث ABC داریم $B = 2C$. عمود منصف ضلع BC در نقطه D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمود منصف BD در نقطه F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = 4$ ، شعاع دایره چه قدر می‌شود؟

(۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $3 - \sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$ (۵) $2\sqrt{6}$

۲۸- فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x + y + z = 222$ و $xy + yz + zx = 12321$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن برای A چند است؟

(۱) ۵۴۷۶ (۲) ۴۱۰۷ (۳) ۲۴۱۲ (۴) ۱۶۰۲ (۵) ۱۳۶۹



محاسبات و نکته‌های مهم



۲۹- وترهای AB و CD از دایره W، در نقطه P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = 3AP$.

عمودهای وارد از C و D بر AB را به ترتیب H و H' و وسط پاره خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه قدر

است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۵) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۰- زیر مجموعه‌ای از $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هرگاه بیش از یک عضو داشته باشد و به علاوه برای هر دو عضو

متمايز a و b از A، باقی‌مانده تقسیم $a + b + 1$ بر 100 نیز عضوی از A باشد، چند زیر مجموعه تقریباً جمعی وجود دارد؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۹۹ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۵ (۵) ۲۰۰



محاسبات و نکته‌های مهم



قابل توجه دانش‌آموزان سال دهمی: کمیته علمی المپیاد ریاضی در تلاش است، به‌عنوان جایزه‌ای علمی، تعدادی مدرسه کوتاه تابستانی برای رتبه‌های برتر دانش‌آموزان سال دهم برگزار کند که با ریاضیات زیبا و هنر حل مسأله بیشتر آشنا شوند. جامعه هدف اصلی این برنامه، دانش‌آموزانی هستند که نمرات آن‌ها نزدیک مرز قبولی در مرحله دوم است ولی مدارس محل تحصیل آن‌ها در سال‌های گذشته موفقیت کمتری در المپیاد ریاضی داشته‌اند تا بدین‌وسیله المپیاد ریاضی گسترش یافته و اثرگذاری بیشتری در رشد ریاضیات کشور پیدا کند. امیدواریم در صورت فراهم شدن شرایط، بتوانیم اولیه دوره این مدارس کوتاه را در تابستان سال ۱۳۹۶ اجرا کنیم.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad