

## دفترچه سؤالات مرحله اول

# سی و هفتمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۶	۲۵	۲۱۰ دقیقه

### توضیحات مهم

#### استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- ۱- کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه‌ی سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهای مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
- ۹- وبگاه کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران [www.mathysc.ir](http://www.mathysc.ir) است.



دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ اشتباه به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ اشتباه به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل زیر، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

**سؤال ۱**

هزارگان	صدگان	دهگان	یگان
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>



محاسبات و نکته‌های مهم



۰. (سؤال شماره صفر!) کد سوالات شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخنامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخنامه توضیح داده شده است.

۱- در روستایی با هزای نفر جمعیت، دویست نفر مبتلا به نوعی بیماری شده‌اند. با انجام یک آزمایش می‌توان بیماری را تشخیص داد ولی نتیجه خطا دارد، به این معنی که فرد بیمار را به احتمال ۵ درصد سالم و فرد سالم را به احتمال ۵ درصد بیمار اعلام می‌کند. فردی را به تصادف از مردم این روستا انتخاب کرده و از او آزمایش می‌گیریم. چند درصد احتمال دارد آن فرد بیمار اعلام شود؟

۲- کارخانه‌ای محصولاتش را در بسته‌هایی مکعبی بسته‌بندی می‌کند و در انبار هر ۵۱۲ بسته را به شکل مکعبی  $8 \times 8 \times 8$  به هم متصل می‌کنند. در شرایطی که دمای هوا از حدی بیشتر شود لازم است با جدا کردن این مجموعه ۵۱۲ تایی با صفحات افقی و عمودی، هر بسته دست کم یک وجه داشته باشد که با وجوه بسته‌های دیگر در تماس نباشد. کمترین تعداد صفحه برای رسیدن به چنین وضعیتی چند تا است؟

۳- چند عدد هشت رقمی در مبنای چهار با ارقام ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که بر ۳ بخش پذیر باشد؟

۴- پنج نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی هم خط نیستند. همه پاره‌خط‌هایی که رئوسشان این نقاط است را رسم کرده‌ایم. حداقل چند نقطه جدید در محل تقاطع پاره‌خط‌ها به وجود می‌آید؟

۵ (۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۵- دور گود یک زورخانه ۱۲۸ صندلی، دایره‌وار، چیده شده است. تماشاچی اولی که وارد زورخانه می‌شود روی صندلی شماره یک می‌نشیند. از آنجا که سرماخوردگی در شهر شایع شده، هر فردی که وارد می‌شود روی صندلی‌ای می‌نشیند که فاصله‌اش با نزدیک‌ترین صندلی اشغال شده بیشترین مقدار ممکن باشد و اگر چه صندلی با این خاصیت وجود داشت آن که شماره‌اش کمتر است را انتخاب می‌کند. نفر ۳۹ ام روی کدام صندلی می‌نشیند؟



محاسبات و نکته‌های مهم



۶- عددی طبیعی  $n$ ، کوچک‌ترین عددی است که باقیمانده  $۳n+۴۵$  بر  $۱۰۶۰$  برابر  $۱۶$  است. باقیمانده  $۱۷+۱۸n$  بر  $۱۹۲۰$  چند است؟

۷- مساحت محصور بین نمودار تابع  $y = [۱۰x] + \sqrt{1-x^2}$  در بازه  $[۰, ۱]$  و محور طول‌ها چقدر است؟ (منظور از  $[t]$ ، جزء صحیح عدد  $t$  است.)

۸- شماره اصلی پلاک یک خودرو متشکل از یک عدد دو رقمی در سمت چپ، یکی از حروف الفبا در وسط و یک عدد سه رقمی در سمت راست است و از رقم صفر در این دو عدد استفاده نمی‌شود. به هر پلاک، ضرب دو عدد مورد اشاره را نسبت می‌دهیم. مثلاً به پلاک زیر عدد  $۴۳۸۰ = ۱۲ \times ۳۶۵$  را نسبت می‌دهیم.



میانگین اعداد نسبت داده شده به تمام پلاک‌های ممکن، چند است؟

۹- قسمتی از پارک جنگلی لتیان که بین دو جاده واقع شده، آتش گرفته است. آتش با سرعت  $۱۰$  کیلومتر بر ساعت گسترش می‌یابد. اگر فاصله نقطه شروع آتش‌سوزی تا هر دو جاده  $۱۰$  کیلومتر باشد، پس از  $۲$  ساعت مساحت ناحیه سوخته شده چند کیلومتر مربع است؟ (جاده‌ها را خط‌های طولانی، راست و موازی با هم بگیرید و فرض کنید آتش از جاده عبور نمی‌کند.)

(۳)  $۴۰۰\sqrt{۳} + ۴۰۰ \frac{\pi}{۳}$

(۲)  $۱۰۰\sqrt{۳}$

(۱)  $۲۰۰\sqrt{۳}$

(۵)  $۴۰۰\sqrt{۳}$

(۴)  $۲۰۰\sqrt{۳} + ۴۰۰ \frac{\pi}{۳}$

۱۰- مثلث  $ABC$  را در نظر بگیرید که  $AB=AC=۱۵$  و  $BC=۱۸$ . نقاط  $D$  و  $E$  را به ترتیب روی  $CA$  و  $CB$  طوری بگیرید که  $CD=۵$  و  $CE=۳$  نقطه  $F$  را روی نیم‌خط  $\overrightarrow{DE}$  طوری در نظر بگیرید که  $EF=۸$ . نقطه  $M$  را وسط  $AB$  و  $N$  را نقطه برخورد  $FM$  با  $BC$  بگیرید. طول  $CN$  چقدر است؟



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۱- طبق ضوابط، ساختمان‌های یک کوچه نباید بیش از ۹ طبقه داشته باشند. به علاوه اگر تعداد طبقات دو ساختمان، با هر چقدر فاصله، برابر باشد، حتماً باید ساختمانی با تعداد طبقات بیشتر از آن دو بینشان وجود داشته باشد. حداکثر چند ساختمان در یک سمت کوچه می‌توان ساخت؟



۱۲- چند سه‌تایی  $(a, b, c)$  از اعداد طبیعی اکیداً کمتر از ۵۱ داریم که  $a + b + c$  بر  $a$ ،  $b$  و  $c$  بخش پذیر باشد؟

۱۳- فردی می‌خواهد کنار دیوار باغش، ناحیه‌ای را برای نگهداری از مرغ و خروس‌هایش بسازد. او سه نرده به طول ده متر دارد. با استفاده از دیوار باغ، که مستقیم و طولانی است و این سه نرده، حداکثر مساحتی را که می‌تواند محصور کند چند متر مربع است؟

- (۱) ۱۰۰      (۲)  $۵۰ + ۲۵\sqrt{۳}$       (۳)  $۵۰ + ۵۰\sqrt{۴}$       (۴)  $۷۵\sqrt{۳}$       (۵) ۳۰۰

۱۴- برای چند مقدار صحیح  $k$ ، دستگاه معادلات زیر جوابی غیر از  $a = b = c = ۰$  در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = kc(a + b) \\ b^2 + c^2 = ka(b + c) \\ c^2 + a^2 = kb(c + a) \end{cases}$$

- (۱) ۰      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳      (۵) بی‌نهایت



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۵- فرض کنید  $a_1, a_2, \dots, a_{20}$  همان اعداد ۱ تا ۲۰ باشند که به ترتیبی دلخواه نوشته شده‌اند. عبارت  $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{20}$  چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱۶- زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی دارای این خاصیت است که برای هر دو عضو متمایز آن مثل  $x$  و  $y$ ، داریم  $(x+y-1)^2 = xy+1$ . این مجموعه حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴      (۵) بی‌نهایت

۱۷- دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$  کمتر از ۵۰۰ هستند و  $[m, n] = (m-n)^2$ . حداکثر مقدار  $m+n$  چقدر است؟  $[m, n]$  کوچک‌ترین مضرب مشترک  $m$  و  $n$  است.

۱۸- سه میله با طول‌های ۱۳۹۶، ۱۴۳۹ و ۲۰۱۸ میلی‌متر روی زمین از یک سر به هم لولا شده‌اند. کمترین مقدار ممکن برای شعاع دایره‌ای که از سه سر دیگر میله‌ها می‌گذرد چند میلی‌متر است؟

۱۹- فرض کنید  $x \geq y \geq z$  اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

حداقل مقدار  $\frac{x}{y}$  کدام است؟

(۱) ۱      (۲)  $\sqrt{2}$       (۳)  $\sqrt{3}$       (۴) ۲      (۵) ۴

۲۰- در چهارضلعی محدب و محاطی ABCD داریم  $\angle B = 110^\circ$ . محل برخورد AD و BC را E و محل برخورد AB و CD را F می‌نامیم. اگر عمودهای E بر AB و F بر BC یکدیگر را روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی در نقطه P قطع کنند. اندازه زاویه  $\angle PDF$  چند درجه است؟

۲۱- نقطه P درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع یک قرار دارد. قرینه P نسبت به AB را K، قرینه K نسبت به BC را M و قرینه M نسبت به AC را N می‌نامیم. حداکثر طول NP کدام گزینه است؟

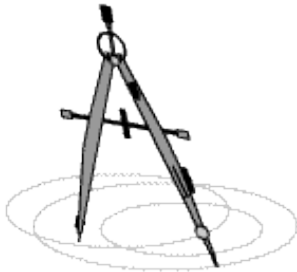
(۱)  $2\sqrt{3}$       (۲)  $\sqrt{3}$       (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (۴) ۳      (۵) ۱



محاسبات و نکته‌های مهم



۲۲- هشت عدد کاشی مشابه  $1 \times 2$  داریم که هر کدام از یک مربع قرمز و یک مربع آبی تشکیل شده است. به چند حالت می توان یک ناحیه  $4 \times 4$  را با این کاشی ها پوشاند طوری که هر سطر و هر ستون آن دو مربع قرمز و دو مربع آبی داشته باشد؟



۲۳- پروانه پرگاری خرید و پس از باز کردن بسته آن متوجه شد طول میله سوزن دار  $10$  سانتی متر و طول میله مدادی  $16$  سانتی متر است! فرض کنید برای این که بتوان با آن پرگار دایره کشید، باید زاویه مداد با کاغذ دست کم  $30^\circ$  درجه باشد ولی سوزن می تواند هر زاویه ای با صفحه کاغذ داشته باشد. تفاضل شعاع بزرگترین دایره و شعاع کوچکترین دایره ای که می توان با این پرگار کشید برحسب سانتی متر به کدام گزینه نزدیکتر است؟

۲۰ (۵)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۲۴- دنباله  $\{a_n\}$  با فرمول زیر تعریف می شود:

$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

حاصل عبارت زیر چقدر است؟

$$\frac{4}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{4}{a_{96}}$$

$\sqrt{19013}$  (۵)

$\sqrt{19013} - 1$  (۴)

$\sqrt{18625}$  (۳)

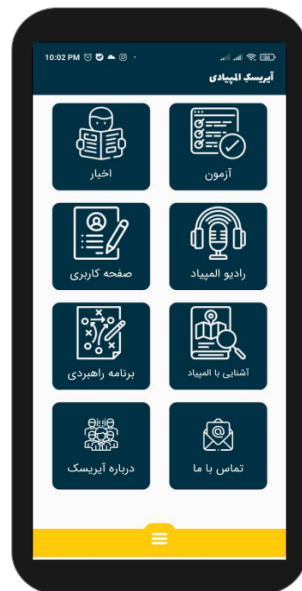
$\sqrt{18625} - 1$  (۲)

$\sqrt{18241}$  (۱)

۲۵- دانشمندان سیاره ای کوچک به شعاع  $30$  کیلومتر کشف کرده اند که تمام سطح آن را آب فرا گرفته است. شهابی کروی شکل به این سیاره برخورد می کند و کاملاً در آب فرو می رود و ارتفاع آب روی سطح سیاره یک سانتی متر افزایش پیدا می کند. شعاع شهاب چند متر بوده است؟



محاسبات و نکته های مهم



○ آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس‌های آنلاین

○ آزمون‌های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا  
"المپیاد آیریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad