

دفترچه سؤالات مرحله اول

سی و هشتمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۷	۲۵	۲۱۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.


- ۱- کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه‌ی سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
- ۹- وبگاه کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.



دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ اشتباه به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ اشتباه به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردم مشخص کنید.

سؤال ۱			
پنج	دو	سه	چهار
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵/۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سؤال‌های پنج گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سؤالات کوتاه پاسخ بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.



محاسبات و نکته‌های مهم



۰. (سؤال شماره صفر!) کد دفترچه شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخنامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخنامه توضیح داده شده است.

۱- دامنه تابع زیر، شامل چند عدد صحیح است؟

$$f(x) = \sqrt[4]{-1 + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{12}{x^2 - 2x}}}}$$

۲- ۱۳۹۷ عدد حقیقی داریم که تشکیل یک تصاعد حسابی می دهند. اگر تعداد اعداد گویا بین ۱۳۹۷ عدد را n بنامیم، تعداد مقادیر ممکن برای n چند حالت مختلف دارد؟

۳- مجموع ارقام عدد $6 \dots 6 \times 99 \dots 9$ چند است؟ (رقم دهگان جواب برابر با ۷ است.)

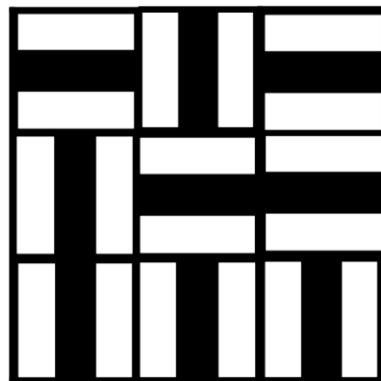
۴- می خواهیم یک جدول 3×3 را به کمک دو نوع کاشی زیر، کاشی کاری کنیم. به طوری که یک مسیر سیاره از یک ضلع جدول به ضلع مقابل آن پدید نیاید. چند حالت کاشی کاری مطلوب داریم؟



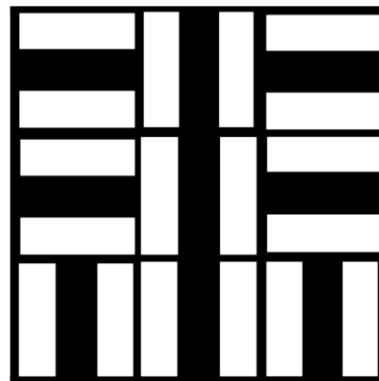
کاشی شماره ۲



کاشی شماره ۱



کاشی کاری مطلوب



کاشی کاری نامطلوب

۵) ۵۱۲

۴) ۳۴۳

۳) ۱۶۹

۲) ۱۷۴

۱) ۳۳۸

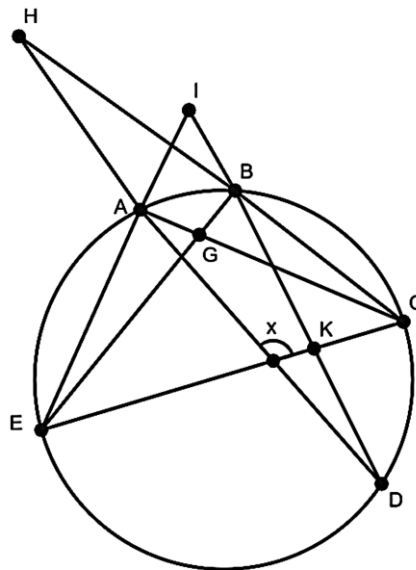


محاسبات و نکته های مهم



۵- چند عدد طبیعی دورقمی داریم که رقم صفر نداشته باشد و بر هر دو رقم خود بخش پذیر باشد؟

۶- در شکل زیر محل تلاقی EB با AC را G می نامیم. زاویه بین تلاقی امتداد پاره خط های AE و BD برابر 70° درجه و زاویه بین تلاقی امتداد پاره خط های DA و CB برابر با 10° درجه است. اگر زوایا \widehat{AGB} و \widehat{BKE} به ترتیب برابر 95° و 70° درجه باشند، مقدار x را بیابید. (شکل دقیق نمی باشد.)



۷- در چند جایگشت a_1, a_2, \dots, a_{13} از اعداد ۱ تا ۱۳، شرایط زیر برقرار است؟ (جواب مربع کامل است.)

$$a_1, a_2 < a_3$$

$$a_4, a_5 < a_6$$

$$a_3, a_6 < a_7$$

$$a_7 < a_8, a_9$$

$$a_8 < a_{10}, a_{11}$$

$$a_9 < a_{12}, a_{13}$$



محاسبات و نکته های مهم



۸- در مثلث ABC، نقطه M را روی ضلع AC طوری در نظر بگیرید که $CM = 2AM$. نیمساز زاویه داخلی \hat{A} ، پاره خط BC را در نقطه D قطع می‌کند. فرض کنید AD بر خط BM عمود است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث BMD است؟

۹- معادله زیر در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (جزء صحیح عدد x را با [x] نمایش می‌دهند).

$$[x](x-1) = 2|x|$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) بی‌نهایت

۱۰- n عدد طبیعی داریم که اختلاف هر دوتایی از آنها یک عدد اول است. حداکثر مقدار n چند می‌تواند باشد؟

۱۱- رئوس یک پنج‌ضلعی (محدب یا مقعر) با مساحت ۷، روی نقاطی با مختصات صحیح در صفحه مختصات قرار دارد. حداکثر چند نقطه با مختصات صحیح می‌تواند درون این چندضلعی باشد؟ (نقاط روی مرز جزء نقاط درونی حساب نمی‌شود).

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۲- از مجموعه $\{1, 2, \dots, 765\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد به طوری که هیچ کدام مربع کامل نبوده و جمع هیچ دوتایی از آنها برابر ۷۶۵ نباشد؟ (حاصل جمع ارقام جواب، ۱۲ است.)

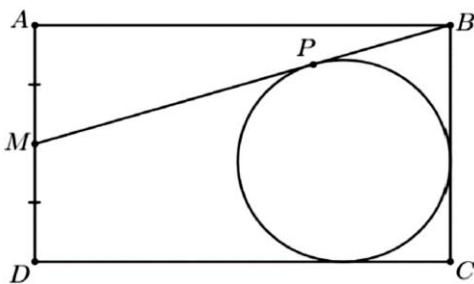
۱۳- برای چند مقدار a از مجموعه $\{-\frac{5}{5}, -\frac{4}{5}, \dots, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}\}$ تابع $f(x) = ax - [x]$ یک‌به‌یک است؟

۱۴- اگر $S(n)$ مجموع ارقام عدد n، و $P(n)$ حاصل ضرب ارقام n باشد، چند عدد طبیعی مختلف n می‌توان یافت به طوری که:

$$S(n) + P(n) = n$$



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۵- در مستطیل شکل روبه‌رو، M وسط ضلع AD است. دایره‌ای داخل مستطیل در نظر بگیرید به طوری که بر پاره‌خط‌های BC ، DC و MB مماس باشد و محل تماس آن با پاره‌خط MB را P بنامید. اگر $MP = AD$ باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (شکل دقیق نمی‌باشد.)

۳ (۵)

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۱)

۱۶- در یک عملیات امنیتی، ۵ نفر دستگیر شده‌اند. تعدادی از آن‌ها مجرم و تعدادی بی‌گناه‌اند. می‌دانیم افراد مجرم همواره دروغ گفته و افراد بی‌گناه همواره راست می‌گویند. اگر این ۵ نفر جملات زیر را گفته باشند دقیقاً چند مجرم داریم؟



- نفر اول: حداقل دو نفر از ما بی‌گناه است.
- نفر دوم: حداقل دو نفر از ما مجرم است.
- نفر سوم: همه بی‌گناه هستند.
- نفر چهارم: دقیقاً یک نفر از ما مجرم است.
- نفر پنجم: دقیقاً یک نفر از ما بی‌گناه است.

۵ (۵)

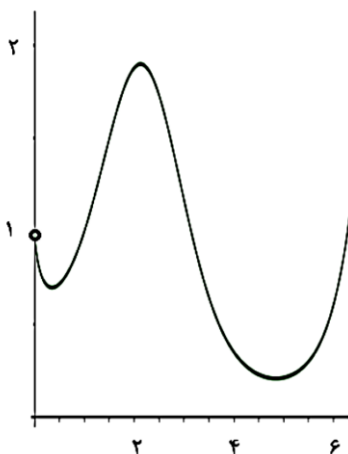
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۷- در شکل روبه‌رو مربوط به بخشی از نمودار کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



x^x (۱)

$(\cos(x))^x$ (۲)

$(\sin(x))^x$ (۳)

$(\sin(x))^{\sin x}$ (۴)

$x^{\sin(x)}$ (۵)



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۸- در مثلث قائم الزاویه ABC ، زاویه B قائمه بوده و نقاط M و N به ترتیب بر روی پاره‌خط‌های AC و AB به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که MN بر AC عمود باشد. محل تلاقی امتداد MN با امتداد ضلع BC را P می‌نامیم. می‌دانیم که PN برابر MN است. فرض کنید O وسط ضلع AC باشد. اگر طول MN و ON به ترتیب برابر ۲۰ و ۲۱ سانتی‌متر باشد، طول وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC را بیابید. (جواب سؤال عدد طبیعی است.)

۱۹- چند دنباله از اعداد طبیعی مانند $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وجود دارد به طوری که دارای هر دو ویژگی زیر باشد؟

- $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$
- $a_3 = ۵۴۰۰۰$

۲۰- در کلاس ترکیبیات، آوا همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه $\{1, 2, \dots, 1397\}$ را بر روی تخته نوشت. وی در ادامه به جای هر زیرمجموعه میانگین اعضای آن را قرار می‌دهد. میانگین اعداد نوشته شده بر روی تخته چند است؟

۲۱- چند زوج مرتب حقیقی (a, b) وجود دارد به طوری که:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 2(a-b) \\ 3(a-b)^2 = 4ab \end{cases}$$

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت

۲۲- درون مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $(AB = AC)$ نقطه P مفروض است. پای عمودهای P بر اضلاع AB ، AC و BC را به ترتیب X ، Y و Z می‌نامیم. می‌دانیم مقدار زاویه \widehat{BAC} و \widehat{XYZ} به ترتیب ۴۰° و ۷۰° درجه می‌باشند. اگر $PX = 2PY = 4$ باشد، طول PZ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{6}$ (۵) $2\sqrt{2}$



محاسبات و نکته‌های مهم



۲۳- دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شکرستان تعدادی استاد دارد که به ترتیب حروف الفبا به آن‌ها شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ... داده شده است. رئیس دانشکده از اساتید خواسته که برای خود کدی شامل چهار عدد اول درست کنند. استاد شماره n باید اعداد $n+1$ ، $n+2$ ، $n+3$ و $n+4$ را در نظر گرفته و سپس به جای هر یک از این چهار عدد، یکی از عوامل اول آن را به دلخواه بنویسد. برای مثال اگر شماره استادی ۵۳ باشد، باید اعداد ۵۴، ۵۵، ۵۶ و ۵۷ را در نظر گرفته و می‌تواند این کد را انتخاب کند: ۳، ۵، ۷ و ۳ (او انتخاب‌های دیگری نیز دارد). می‌دانیم که اساتید به هر شکلی که کد خود را انتخاب کنند، کد هیچ دو استادی برابر نخواهد شد. این دانشکده حداکثر چند استاد دارد؟

۲۴- برای اعداد حقیقی a و b می‌دانیم $a \in [0, 3]$ و $b \in [1, 2]$. حداقل و حداکثر مقدار عبارت $a^2 - ab + b^2$ را به ترتیب، m و M می‌نامیم. مقدار جزء صحیح $[4(M-m)]$ چند خواهد بود؟

۲۵- چند تابع صعودی $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ داریم، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq 6$ داشته باشیم:

$$|f(i) - i| \leq 1$$

۱۲۸ (۵)

۳۲۴ (۴)

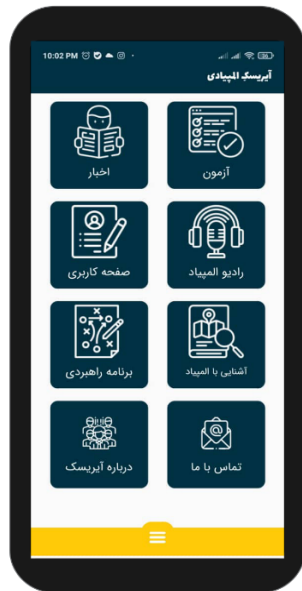
۸۹ (۳)

۱۶۴ (۲)

۱۴۴ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس‌های آنلاین

○ آزمون‌های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد آی‌ریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad