

دفترچه سؤالات مرحله اول

سی و هشتمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۸	۱۶+۹	۲۱۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.


۱. کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه‌ی سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهای مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره‌ی منفی دارد. پاسخ نادرست به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
۷. شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
۸. داوطلبان نمی‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
۹. وبگاه کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.



دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ اشتباه به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ اشتباه به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردم مشخص کنید.

سؤال ۱			
میزبان	مربی	دعوتی	بچه
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵/۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سؤال‌های پنج گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمناً امسال در انتهای برخی از سؤالات کوتاه پاسخ بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.



محاسبات و نکته‌های مهم



۰. (سؤال شماره صفر!) کد دفترچه شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخنامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخنامه توضیح داده شده است.

۱- چند عدد طبیعی حداکثر شش رقمی با ارقام ۰ و ۱ وجود دارد که مضرب ۱۱ باشد؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹ (۵)

۲- تعداد جواب‌های صحیح معادله مقابل را بیابید.
 $(x^2 + 5x + 5)(x^2 - 10z + 21) = 1$

: جواب عددی اول است.

۳- ABCD مربعی به ضلع $\sqrt{2}$ است. دایره t به شعاع ۲ که مرکز آن (نقطه O) روی خط CD قرار دارد (D بین C و O است) از راس D مربع گذشته است. k دایره‌ای گذرا از رأس A می‌باشد که مرکز آن، روی امتداد پاره‌خط CA از طرف A قرار دارد و در نقطه P بر دایره t مماس شده است، به طوری که نقاط P، A و B در یک طرف خط CD قرار دارند. شعاع دایره k چقدر است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (۴) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۵)

۴- مدرسه‌ای در شکرستان، ۱۲ دانش‌آموز دارد. برخی از این دانش‌آموزان با هم تعدادی انجمن تشکیل داده‌اند. می‌دانیم یک شخص می‌تواند در بیش از یک انجمن عضویت داشته باشد. برخی از انجمن‌ها ۳ عضو، و بقیه انجمن‌ها ۴ عضو هستند. می‌دانیم که هر دو دانش‌آموزی دقیقاً در یکی از این انجمن‌ها، با هم عضو هستند. اگر تعداد انجمن‌های این مدرسه، ۱۳ تا باشد، چند تا از این انجمن‌ها ۳ عضو هستند؟

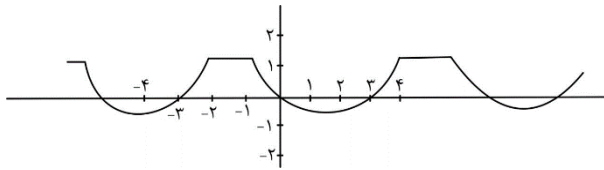
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۵- عدد طبیعی a را «جالب» می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی x, y (نه لزوماً متمایز) وجود داشته باشند که $a = x^2 y^2$. عدد ۹! چند مقسوم‌علیه جالب دارد؟

: مجموع ارقام جواب بر ۱۰ بخش پذیر است.

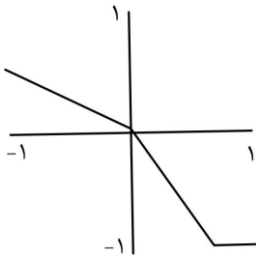


محاسبات و نکته‌های مهم

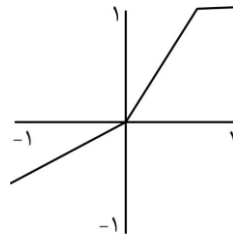


۶- برای تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، می‌دانیم نمودار $f(\sin(x))$ به شکل مقابل است.

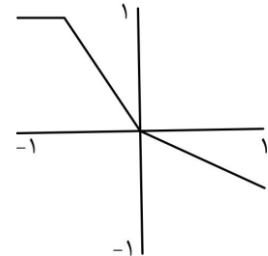
کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند بخشی از نمودار تابع $f(x)$ باشد؟



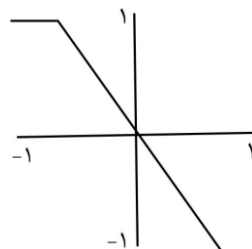
(۳)



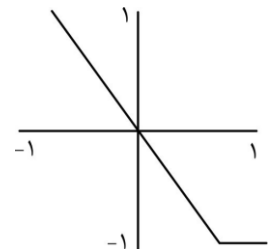
(۲)



(۱)



(۵)



(۴)

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD زاویه BAD حاده است. نیمساز زاویه BAD پاره‌خط DC را در E قطع می‌کند. اگر ABED یک چهارضلعی محاطی باشد و دایره محیطی آن بر ضلع BC مماس شود، اندازه زاویه AED چند درجه است؟

: جواب عددی طبیعی و بر ۴ بخش پذیر است.



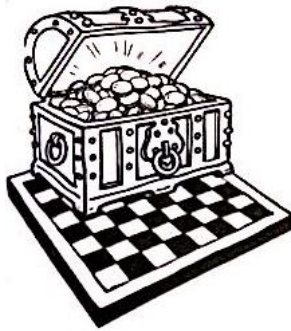
۸- علی اعداد ۱ تا ۱۳۹۸ را به ترتیب دلخواه خود در یک ردیف می‌نویسد. وی در هر مرحله دو عدد متوالی را پاک کرده و بین آن‌ها اختلافشان را می‌نویسد. مشخص است که پس از ۱۳۹۷ مرحله تنها یک عدد بر روی تخته باقی می‌ماند. این عدد حداکثر برابر چند می‌تواند باشد؟

۹- یک عدد طبیعی سه رقمی را «منظم» می‌نامیم هرگاه اولاً از سه رقم متمایز و ناصفر تشکیل شده باشد و ثانیاً با در نظر گرفتن هر دو رقم متوالی‌اش، رقم سمت راستی بر رقم سمت چپی بخش‌پذیر باشد. به عنوان مثال عدد ۱۲۶ یک عدد منظم است. چند عدد منظم سه رقمی وجود دارد؟

: باقیمانده تقسیم جواب بر ۴ برابر ۳ است.



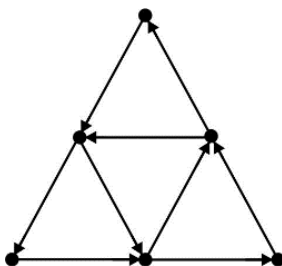
محاسبات و نکته‌های مهم



۱۰- پادشاه شهر فلک‌الافلاک می‌خواهد به مخترع بازی شطرنج به دلخواه او جایزه دهد. مخترع از پادشاه می‌خواهد در هر خانه سیاه که در سطر و ستون i ام و j ام واقع است، تعداد $i \times j$ سکه نقره قرار دهد، و در انتها جمع سکه‌ها جایزه او شود. با توجه به اینکه صفحه شطرنج 8×8 بوده و خانه واقع در سطر و ستون 1 ام سیاه است، جایزه مخترع شطرنج چند سکه نقره می‌شود؟

جواب دو رقم یکسان دارد.

۱۱- نقطه G مرکز ثقل مثلث ABC (محل برخورد میانه‌های مثلث) است. از G خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در K قطع کند. نقطه M وسط ضلع AB است و محل برخورد خطوط AK و CM را F می‌نامیم. اگر مساحت مثلث KFM برابر با سه سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث ABC چند سانتی‌متر مربع است؟



۱۲- شهر مصلس‌ها از تعدادی میدان و خیابان‌های یک‌طرفه به شکل روبه‌رو تشکیل شده است. جهت هر یک از خیابان‌های این شهر مطابق جهت مشخص شده بر روی شکل است. برای طی کردن هر کدام از این این خیابان‌ها، یک لیتر بنزین لازم است. سپهر می‌خواهد با ماشین شخصی خود که ۹ لیتر بنزین دارد در خیابان‌های این شهر با شروع از A به گردش بپردازد. وی به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (در طول مسیر ممکن است از شهر و یا خیابان تکراری گذر کند).

اختلاف رقم دهگان و یکان جواب کمتر و یا مساوی ۱ است.

۱۳- تعداد سه‌تایی‌های مرتب x, y, z از اعداد صحیح $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1000$ را بیابید به طوری که عدد طبیعی n موجود باشد که

$$(x+y+z)(x+1)(y+1)(z+1) = 2^n$$

۱۲ (۵)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



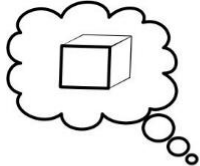
۱۴- ضرب x^{60} در چند جمله‌ای زیر چند است؟

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1) \dots (x^{15}-1)$$

۱۵- لانه مورچه‌ای در وسط یکی از یال‌های مکعبی به ضلع واحد قرار دارد. وسط هر کدام از یال‌های دیگر مکعب (به غیر از مکان لانه) تکه‌ای

نان قرار دارد. اگر مورچه بخواهد با حرکت روی سطح جانبی مکعب، همه نان‌ها را برداشته و در نهایت به

لانه خود بازگردد، طول کوتاه‌ترین مسیری که با انجام این فرآیند طی می‌کند، چقدر است؟



(۲) $6\sqrt{2}$

(۱) $2 + 5\sqrt{2}$

(۴) $1 + 4\sqrt{2}$

(۳) $12\sqrt{2}$

(۵) ۱۲

۱۶- ۱۲ لامپ و ۱۲ کلید با شماره ۱ تا ۱۲ داریم. با زدن کلید شماره k ، همه لامپ‌هایی که شماره آن‌ها کمتر یا مساوی k است، تغییر وضعیت

می‌دهند. در ابتدا تمامی لامپ‌ها خاموش هستند. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌ای ۷ عضوی از کلیدها را انتخاب کرد، به طوری که با

زدن آن‌ها دقیقاً ۷ لامپ روشن شود؟

جواب دو رقم یکسان دارد.

۱۷- تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی از مجموعه اعداد حقیقی را بیابید که هر طور آن‌ها را به دو دسته دو عضوی افزایش کنیم، حاصل ضرب

اعضای یک دسته با حاصل جمع دسته دیگر برابر باشد.

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

(۵) بی نهایت

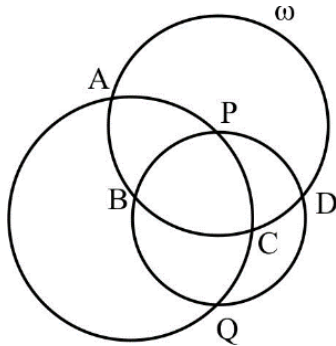
(۴) ۲۴



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۸- آلیس در سرزمین عجایب توسط ریاضی دانی بدجنس در کلاسی زندانی شده است. آلیس باید به مدت یک هفته روی یک معمای ریاضی کار کند و در انتها جواب را به ریاضی دان بگوید و تنها در صورتی آزاد می شود که پاسخ او درست باشد. کلاس بزرگی که آلیس در آن محبوس شده تخته بسیار بزرگی دارد که در ابتدا روی آن اعداد $۱۰۰۰, ۹۹۹, ۹۹۸, \dots, ۲, ۱$ به ترتیب نوشته شده است. آلیس باید در روز i ام عدد i ام نوشته شده روی تخته مانند a را در نظر بگیرد. سپس هر عدد روی تخته مانند b را بر $b \cdot m$ آن عدد و a تقسیم کرده و حاصل را به جای b روی تخته بنویسد (مثلاً در انتهای روز اول اعداد تخته به صورت $۵۰۰, ۹۹۹, ۳, ۲, ۳, ۱$ در می آیند). جواب معما تعداد یک های نوشته شده روی تخته در انتهای روز هفتم است. (مثلاً در انتهای روز اول یک عدد ۱ روی تخته وجود دارد). اگر شما پیش آلیس بودید آیا می توانستید به سرعت جواب نهایی را محاسبه کرده و آلیس را نجات دهید؟ اگر چنین است جواب را در پاسخ نامه وارد نمایید.



۱۹- در شکل مقابل، دو دایره در نقاط P و Q متقاطع هستند. دایره ω به مرکز P می باشد که دو دایره دیگر را در نقاط A, B, C, D قطع می کند. اگر زاویه BQC برابر با ۵۰ درجه و زاویه CQD برابر با ۲۰ درجه باشد، اندازه زاویه ADC چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست).

: جواب عددی طبیعی و باقیمانده تقسیم آن بر ۴ برابر ۳ است.

۲۰- امید بر روی راس های یک ۱۳۹۸ ضلعی منتظم اعداد $۰, ۱$ و -۱ را نوشته است (ممکن است از برخی از این اعداد استفاده نشود). به طوری که عدد هر کدام از راس ها میانگین عدد دو راس مجاور، یا مجموع عدد دو راس مجاور آن است (ممکن است برخی از راس ها میانگین، و برخی دیگر مجموع دو راس مجاور آن باشند). مجموع اعداد همه راس های این ۱۳۹۸ ضلعی چند حالت مختلف، می تواند داشته باشد؟

۱۳۹۹ (۳)

۱۳۹۷ (۲)

۱۳۹۵ (۱)

۲۷۹۷ (۵)

۲۷۹۵ (۴)

۲۱- تعداد اعداد طبیعی سه رقمی را بیابید که دو رقم سمت راست مربعشان با دو رقم سمت راست خودشان نظیر به نظیر برابر باشد. (مانند ۲۲۵ که دو رقم سمت راستش با دو رقم سمت راست $۵۰۶۲۵ = ۲۲۵^2$ برابر است).



محاسبات و نکته های مهم





۲۲- برای اعداد حقیقی x ، کمترین مقدار عبارت زیر چند است؟

$$\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$$

(۳) $\sqrt{34}$

(۲) $4\sqrt{2}$

(۱) $2 + \sqrt{5}$

(۵) $\sqrt{8} + \sqrt{10}$

(۴) $\sqrt{5} + \sqrt{13}$

۲۳- دایره ω_1 به مرکز O مفروض است. وتر AB از دایره ω_1 به گونه‌ای انتخاب شده که دایره ω_2 به قطر AB ، از O بگذرد. نقطه C روی خط AB طوری قرار دارد که زاویه BCO برابر با 20° درجه است (B بین نقاط C و A قرار دارد). پاره خط OC دایره ω_2 را برای بار دوم در K قطع کرده است. نقطه D روی دایره ω_1 قرار دارد. به گونه‌ای که CD بر دایره ω_1 مماس است و نقاط D و O در یک طرف خط AB قرار دارند. اگر طول پاره خط DK برابر با $3\sqrt{2}$ باشد، طول پاره خط CD چقدر است؟

۲۴- در هر یک از خانه‌های یک جدول 3×4 یک نفر نشسته است. هر کدام از این افراد یا راستگو است و همیشه راست می‌گوید یا دروغگو است که همیشه دروغ می‌گوید. در یک لحظه هر کدام از این ۱۲ نفر گفتند: «تعداد افراد راستگو در سطر من با تعداد افراد راستگو در ستون من برابر است.» حداکثر چند نفر از این افراد می‌توانند دروغگو باشند؟

۲۵- دستگاه زیر چند دسته جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 = bc(1 + a) \\ b^2 = ac(1 + b) \\ c^2 = ab(1 + c) \end{cases}$$



محاسبات و نکته‌های مهم

