

دفترچه سؤالات مرحله اول

سی و نهمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۹	۱۶	۱۲۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.


- ۱- کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه‌ی سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند یاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و یاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. یاسخ نادرست به سؤال‌های یاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
- ۹- وبگاه کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.
- ۱۰- در صورتی که به هر دلیل مثل قطعی برق و خرابی دستگاه تکثیر و ... آزمون با تأخیر شروع شد به همان اندازه، شما وقت اضافه خواهید داشت.



دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ اشتباه به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ اشتباه به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردم مشخص کنید.

سؤال ۱			
میزبان	مدعی	دعوی	بخت
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵/۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سؤال‌های پنج گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سؤالات کوتاه پاسخ بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.



محاسبات و نکته‌های مهم



۱- دو عدد طبیعی را زوج خوشبخت گوئیم هرگاه تعداد ارقام آن‌ها برابر و ترتیب ارقام آن‌ها کاملاً عکس یکدیگر باشد (مثلاً ۲۳۱ و ۱۳۲ زوج خوشبخت است). چند زوج خوشبخت سه رقمی وجود دارد که اختلاف آن‌ها ۷ برابر عددی طبیعی است؟

باقیمانده تقسیم جواب بر ۸ برابر ۴ است.

$$x^{[x]} = x + [x]$$

۲- معادله مقابل چند جواب در اعداد حقیقی مثبت دارد؟

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

جواب عددی فرد است.

۳- در مستطیل ABCD می‌دانیم $AB = 3$ و $BC = 2$ است. دایره‌ای به اضلاع AB، BC و CD مماس است. از نقطه D مماسی غیر از ضلع CD بر دایره رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه P قطع کند. طول DP کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (5)$$

$$\sqrt{10} - 1 \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

۴- خانه‌های یک جدول 6×6 همانند شکل زیر با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از این جدول را انتخاب کرد به طوری که ۳ تا از آن‌ها از یک رنگ و ۳ تا از رنگ دیگری باشند و در ضمن هیچ دو تا در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند؟

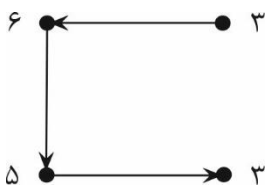
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴



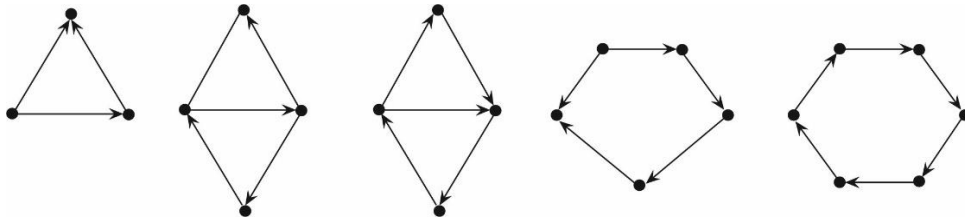
محاسبات و نکته‌های مهم



۵- می‌خواهیم برای اشکالی مانند شکل مقابل، روی هر یک از رئوس شکل، اعدادی بین ۱, ۲, ..., ۶ را بنویسیم طوری که برای هر پیکان که از رأس با عدد x خارج و به رأس با عدد y وارد شده باشد، $5x + y$ مضرب ۷ باشد. مانند اعدادی که روی رئوس شکل مقابل است:



مثلاً در بالاترین پیکان $5 \times 3 + 6 = 21$ مضرب ۷ است. در چند شکل از اشکال زیر می‌توان این کار را انجام داد؟



۶- چند چهارتایی مرتب (a, b, c, d) از اعداد صحیح در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$a + b = c^2 + d^2, \quad c + d = a^2 + b^2$$

(۵) بی‌نهایت

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۷- مساحت چندضلعی‌ای که طول همه اضلاع آن برابر یک سانتی‌متر است و زوایای داخلی آن به صورت یکی در میان برابر ۹۰ و ۲۲۵ درجه است، چند سانتی‌متر مربع است؟

(۵) ۱۶

(۴) $6 + 6\sqrt{2}$

(۳) $8 + 4\sqrt{2}$

(۲) $6 + 4\sqrt{2}$

(۱) $8 + 2\sqrt{2}$



۸- در یک کیسه ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی وجود دارد. مهدیار در ابتدا با یک چشم‌بند، چشم‌های خود را به‌طور کامل می‌بندد. سپس در گام اول یکی از توپ‌ها را از کیسه به بیرون می‌اندازد. در گام دوم ۵ توپ را از کیسه خارج کرده و به کیسه دوم منتقل می‌کند. در گام سوم یک توپ را از کیسه دوم به بیرون می‌اندازد. در گام چهارم از کیسه دوم ۲ توپ خارج کرده و به کیسه سوم منتقل می‌کند. سپس یک توپ را از کیسه سوم خارج می‌کند. احتمال اینکه توپ خارج شده قرمز باشد، کدام است؟

(۵) $\frac{4}{5}$

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{2}{5}$



محاسبات و نکته‌های مهم



۹- مجموع ارقام یک عدد طبیعی برابر ۱۸ است. کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد باشد؟

۳۶ (۵)

۲۴ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۰- علی و رضا هر کدام یک دنباله حسابی ۳ جمله‌ای از اعداد حقیقی و مثبت انتخاب کرده و روی برگه خود، از چپ به راست می‌نویسند. سپس هر دو برگه‌ها را کنار هم قرار داده و جملات دنباله‌ها را نظیر به نظیر با هم مقایسه می‌کنند و نتیجه را به صورت دنباله‌ای از حروف «ب»، «ک» و «م» روی تخته، از چپ به راست می‌نویسند. این‌گونه که اگر جمله i ام دنباله علی از جمله i ام دنباله رضا بزرگ‌تر بود حرف «ب»، اگر کوچک‌تر بود حرف «ک» و اگر مساوی بود حرف «م» را به عنوان جمله i ام دنباله نتیجه، روی تخته می‌نویسند. به عنوان مثال اگر دنباله علی ۲ ۳ ۴ و دنباله رضا ۱ ۴ ۷ باشد، دنباله نتیجه ک ک ب خواهد بود. چه تعداد از دنباله‌های حروف زیر نمی‌تواند به عنوان نتیجه روی تخته نوشته شده باشد؟

ک م ب

م ب م

ک ک م

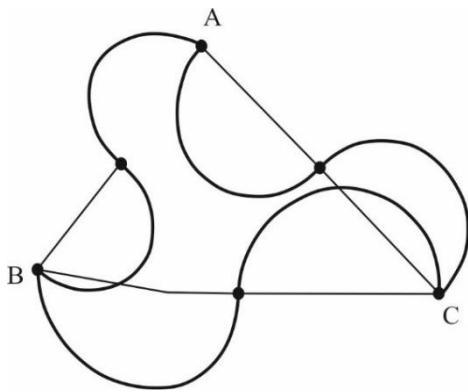
ب ک م

ب ب ک

ک ب ب

ک م ک

م ب ک



۱۱- می‌خواهیم مساحت برکه دوستی را محاسبه کنیم. محیط برکه دوستی، مانند شکل، از شش نیم‌دایره تشکیل شده که از رئوس و اواسط اضلاع مثلث ABC عبور می‌کند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵۰، ۶۰ و ۷۰ متر باشد، مساحت برکه دوستی چند متر مربع است؟

$300\sqrt{6}$ (۳)

۳۰۰۰ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

360π (۵)

$600\sqrt{6}$ (۴)

و دوران‌های



۱۲- به چند طریق می‌توان ۶ خانه از یک جدول 3×5 را حذف کرد به طوری که در خانه‌های باقیمانده شکلی مانند

آن، یافت نشود؟

۲۲ (۵)

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۳- n عددی طبیعی است. می دانیم n دارای حداقل سه مقسوم علیه مثبت است و همچنین اگر $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ مقسوم علیه های آن باشند،

داریم $d_{k-1} - d_{k-2} = 1399$ بزرگ ترین مقدار ممکن برای n چند است؟

رقم دهگان جواب برابر ۹ است.

۱۴- چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی در دستگاه معادلات زیر صدق می کنند؟

$$\begin{cases} 2y^2 + 2y + 4x = x^2 + xy + 4 \\ y^2 + 2x^2 + 2y = 5x + 3xy + 3 \end{cases}$$

۱۵- دایره W_1 به مرکز O و شعاع ۴ سانتی متر بر دایره W_2 در نقطه S مماس داخل است. وتر AB از دایره W_2 در نقطه M بر W_1 مماس

است. می دانیم OAB متساوی الساقین است. اگر زاویه AOB برابر 120° درجه باشد، شعاع دایره W_2 چند سانتی متر است؟

جواب عددی طبیعی است.

۱۶- می خواهیم تعدادی زیرمجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ انتخاب کنیم به گونه ای که بتوانیم با شروع از این مجموعه های

انتخاب شده و اعمال اجتماع و اشتراک مجموعه ها به هر زیرمجموعه دلخواه از S برسیم. حداقل چند زیرمجموعه باید انتخاب کنیم؟

جواب مضرب ۴ است.



محاسبات و نکته های مهم

