

دفترچه سؤالات مرحله اول

سی و دومین المپیاد کامپیوتر

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۰	۱۵	۹۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- ۱- کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه‌ی سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاہ تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.
- ۷- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود).
۸. خبرگاه المپیاد کامپیوتر: inoi.ir می‌باشد.



- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال ۱ نمره منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به‌طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخنامه کنید.
- سؤالات ۱۴ تا ۱۵ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱- فرض کنید $A_0 = \emptyset$ ، و به ازای هر عدد طبیعی n ، داشته باشیم $A_n = \{\emptyset, \{A_{n-1}\}\}$. برای مثال $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. در عبارتی که برای نمایش A_1 نوشته می‌شود، اگر به جای هر علامت « \emptyset »، عبارت « $\{\}$ » را جایگزین کنیم، رشته حاصل چند علامت « $\{\}$ » خواهد داشت؟

(۱) ۳۱ (۲) ۱۰۲۴ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲ (۵) ۳۰

۲- به یک عبارت ریاضی ساده گوییم، اگر تنها از اعداد طبیعی، دو عمل جمع و ضرب، و پرانتز ساخته شده باشد (لزومی ندارد از تمام موارد گفته شده استفاده شده باشد). فرض کنید مجموع تمام اعداد به کار رفته در یک عبارت ریاضی ساده، برابر ۸ باشد. اگر تمام اعداد این عبارت را در ۲ ضرب کنیم، حاصل عبارت حداکثر می‌تواند چند برابر شود؟

(۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۸ (۴) ۱۶ (۵) ۲

۳- سنگ، کاغذ، قیچی یک بازی معروف دو نفره است که به شکل زیر انجام می‌شود:

هر بازیکن یک دستکش را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ و قیچی در می‌آورد (دو بازیکن به طور هم‌زمان این کار را انجام می‌دهند). اگر دو بازیکن یک شکل را انتخاب کرده باشند، نتیجه بازی مساوی می‌شود؛ در غیر این صورت، برنده به صورت زیر مشخص می‌گردد:

- اگر یک دست به شکل سنگ و دست دیگر به شکل قیچی باشد، برنده بازی کسی است که دستش به شکل سنگ است.
- اگر یک دست به شکل قیچی و دست دیگر به شکل کاغذ باشد، برنده بازی کسی است که دستش به شکل قیچی است.
- اگر یک دست به شکل کاغذ و دست دیگر به شکل سنگ باشد، برنده بازی کسی است که دستش به شکل کاغذ است.

۶ نفر با شماره‌های ۱ تا ۶ به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف ایستاده‌اند. به ازای هر $1 \leq i \leq 5$ ، دست چپ نفر شماره i با دست راست نفر شماره $i+1$ بازی سنگ، کاغذ، قیچی را (دقیقاً یک مرتبه) انجام می‌دهد. یک نفر خسته‌کننده نامیده می‌شود، اگر نتیجه هر دو بازی‌اش یکسان شود (یعنی هر دو بازی را ببرد، یا هر دو بازی را ببازد، یا هر دو بازی‌اش مساوی شود). نفرات با شماره‌های ۱ و ۶ (که تنها یک بازی انجام می‌دهند)، خسته‌کننده محسوب نمی‌شوند. در چند حالت متمایز از انجام بازی‌ها، فرد خسته‌کننده‌ای وجود ندارد؟ دو حالت از انجام بازی‌ها را متمایز در نظر می‌گیریم، اگر دستی باشد که در این دو حالت، دو شکل مختلف (از سه شکل سنگ، کاغذ، و یا قیچی) را انتخاب کرده باشد.

(۱) ۲۳۳۲۸ (۲) ۱۱۶۶۴ (۳) ۷۲۹ (۴) ۶۹۹۸۴ (۵) ۷۷۷۶



محاسبات و نکته‌های مهم



۴- در یک مرغداری، برای باز شدن هر تخم مرغ و در آمدن جوجه از آن باید تعدادی نوک به آن زده شود (این مقدار به میزان استحکام پوست تخم مرغ بستگی دارد). ۷ تخم مرغ داریم که به ترتیب به ۰، ۱، ۲، ... و ۶ نوک برای باز شدن نیاز دارند. می‌خواهیم این تخم مرغ‌ها را در یک ردیف بچینیم. در هر مرحله، یکی از تخم مرغ‌هایی که به ۰ نوک نیاز دارد، باز می‌شود و جوجه از آن بیرون می‌آید؛ سپس جوجه بیرون آمده به تمام تخم مرغ‌های سمت راستش در ردیف ۲ نوک می‌زند (اگر تخم مرغی به کمتر از ۲ نوک نیاز داشته باشد، به همان مقدار مورد نیاز به آن نوک زده می‌شود). در چند ترتیب اولیه از تخم مرغ‌ها در ردیف مذکور، تمام تخم مرغ‌ها جوجه خواهند شد؟

۹۶ (۵)

۱۴۴ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۴۸ (۱)

۵- جدول زیر از ۸ سطر و ۸ ستون با شماره‌های ۱ تا ۸ تشکیل شده است:

۸								
۷								
۶								
۵								
۴								
۳								
۲								
۱								
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

به دو خانه مجاور می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. هر گاه از خانه پایین- چپ جدول آغاز کنیم، هر مرحله به خانه مجاور راستی یا خانه مجاور بالایی برویم و در پایان به خانه بالا- راست جدول برسیم، یک مسیر استاندارد را طی کرده‌ایم.

به ازای هر $1 \leq i, j \leq 8$ ، ارزش خانه واقع در سطر i و ستون j برای کیوان $i+j$ ، و برای پیمان $i-j$ است (ارزش برخی از خانه‌ها برای پیمان منفی می‌شود). برای هر یک از این دو نفر، ارزش یک مسیر استاندارد، برابر مجموع ارزش خانه‌های آن مسیر برای آن شخص است. میانگین ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان و پیمان به ترتیب (از راست به چپ) چیست؟

۳۶ و ۳۶ (۵)

۰ و ۲۷۲ (۴)

۰ و ۱۳۵ (۳)

۲۷۲ و ۳۶- (۲)

۱۳۶ و ۰ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



۶- به یک جایگشت از اعداد ۱ تا n ابرزوج می‌گوییم، اگر مجموع هر ۳ عدد متوالی در آن زوج باشد. بیشینه n را بیابید، به نحوی که جایگشتی ابرزوج از اعداد ۱ تا n وجود داشته باشد.

۸ (۵)

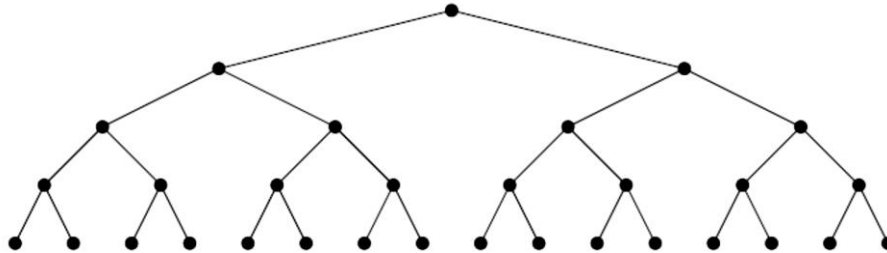
۷ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۵ (۱)

۷- شکل زیر از ۳۱ رأس (نقطه) متمایز و ۳۰ یال (پاره‌خط) ساخته شده است.



فاصله دو رأس برابر کمترین تعداد یال‌های مورد نیاز برای رفتن از یکی به دیگری است. فاصله چند جفت رأس در این شکل برابر ۵ است؟ دقت کنید برای دو رأس a و b ، جفت (a,b) و (b,a) یکسان محسوب می‌شوند.

۸۰ (۵)

۶۴ (۴)

۱۲۸ (۳)

۹۶ (۲)

۱۶ (۱)

۸- ۱۰ دانش‌آموز یک مدرسه در صفی ایستاده‌اند و روی سر هر کدام از آن‌ها کلاهی قرمز یا آبی قرار دارد. ناظم در هر مرحله، یکی از دانش‌آموزان صف را از صف خارج کرده و به کلاس می‌فرستد. نحوه انتخاب دانش‌آموز توسط ناظم در هر مرحله به شکل زیر است:

اگر تنها یک نفر در صف باشد، همان فرد انتخاب می‌شود؛ در غیر این صورت (در صورت وجود حداقل دو نفر در صف)، اگر نفر اول صف کلاه آبی و نفر دوم کلاه قرمز داشته باشند، نفر دوم صف، و در غیر این صورت، نفر اول صف انتخاب می‌شود.

پس از ۱۰ مرحله، تمام دانش‌آموزان صف به کلاس می‌روند. یک دنباله از رنگ‌های قرمز و آبی را به این صورت می‌سازیم که از یک دنباله خالی شروع می‌کنیم و به ازای هر دانش‌آموزی که از صف خارج شد، رنگ کلاه او را در انتهای دنباله اضافه می‌کنیم. به دنباله ۱۰ عنصری حاصل دنباله

سلطانی صف می‌گوییم. تمام $۲^{۱۰}$ حالت اولیه برای رنگ کلاه‌های دانش‌آموزان صف، روی هم چند دنباله سلطانی متمایز تولید می‌کنند؟

۱۲۸ (۵)

۵۱۲ (۴)

۱۴۴ (۳)

۵۱۳ (۲)

۱۰۲۴ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



۹- می‌خواهیم ۲۰ جایزه با ارزش‌های $۲^۰, ۲^۱, \dots, ۲^{۱۹}$ را بین ۱۰ بچه تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً ۲ جایزه برسد؛ حتی ممکن است به یک نفر هیچ جایزه‌ای نرسد). هر بچه به میزان مجموع ارزش جایزه‌های دریافتی‌اش خوشحال می‌شود. پس از پخش جایزه‌ها، به خوشحال‌ترین بچه، **شنگول** و به بچه‌ای که کمترین خوشحالی را دارد، **منگول** می‌گوییم. کمینه اختلاف خوشحالی شنگول و منگول چقدر است؟

- (۱) ۵۲۲۲۴۱ (۲) ۱۰۲۴ (۳) ۵۲۲۷۵۳ (۴) ۴۲۵۷۰۰ (۵) ۳۲۵۲۳

۱۰- جدولی ۲×۳ داریم. به دو خانه از جدول **مجاور** می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به مجموعه‌ای از خانه‌ها **همبند** می‌گوییم اگر به ازای هر دو خانه A و B از آن مجموعه، بتوانیم از A آغاز کرده، هر مرحله به یک خانه مجاور برویم، و در پایان به B برسیم. به چند طریق می‌توان خانه‌های این جدول را به ۴ مجموعه همبند افراز کرد؟

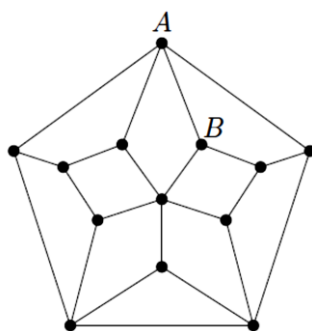
- (۱) ۲ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴) ۳۱ (۵) ۲۱

۱۱- یک جدول ۲×۳ داریم که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. به دو خانه سفید با یک ضلع مشترک در جدول **دومینوس** می‌گوییم. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

تازمانی که در جدول دومینوس وجود دارد، از میان همه دومینوس‌ها، یکی را به صورت تصادفی (با احتمال‌های برابر) انتخاب کرده و هر دو خانه آن را سیاه می‌کنیم.

به چه احتمالی پس از پایان الگوریتم، کل جدول سیاه خواهد شد؟

- (۱) $\frac{۱۳}{۲۱}$ (۲) $\frac{۵}{۷}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) $\frac{۳}{۷}$ (۵) $\frac{۱۷}{۲۱}$



۱۲- در شکل زیر، به دو نقطه (رأس) **مجاور** می‌گوییم، اگر با یک پاره‌خط مستقیم به هم وصل باشند:

می‌خواهیم از نقطه A آغاز کنیم، در هر مرحله به یک نقطه مجاور برویم و پس از دقیقاً ۶ مرحله به نقطه B برسیم (عبور از نقطه یا پاره‌خط تکراری اشکالی ندارد). این کار به چند طریق ممکن است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۰ (۵) ۸



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۳- فرض کنید $\langle a_1, a_2, \dots, a_{14} \rangle$ رشته‌ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به تعدادی رقم متوالی و برابر، یک زنجیره می‌گوییم. زنجیره‌ای که بخشی از یک زنجیره بزرگ‌تر نباشد، بلوک نامیده می‌شود. برای مثال، رشته زیر از ۴ بلوک ساخته شده است:

$\langle 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$

الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

تا زمانی که تعداد بلوک‌های رشته بیشتر از یک است، بلوک اول و دوم (از سمت چپ) را در نظر می‌گیریم و بلوک کوچک‌تر را حذف می‌کنیم (اگر اندازه دو بلوک یکسان بود، بلوکی که شامل ارقام ۰ است، حذف می‌شود).

برای مثال، رشته بالا پس از یک مرحله به رشته $\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ تبدیل می‌شود. در میان تمام حالات ممکن برای رشته ۱۴ رقمی آغازین، کمینه تعداد ارقام رشته نهایی (پس از اجرا کامل الگوریتم مذکور) چیست؟

۳ (۵)

۵ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

دنباله‌ای از اعداد طبیعی داریم. می‌خواهیم تعدادی رابطه بین اعداد این دنباله با شرایط زیر تعریف کنیم:

در هر رابطه، دو عدد نابرابر درگیر می‌شوند که عدد بزرگ‌تر را پدر رابطه و عدد کوچک‌تر را فرزند رابطه می‌نامیم.

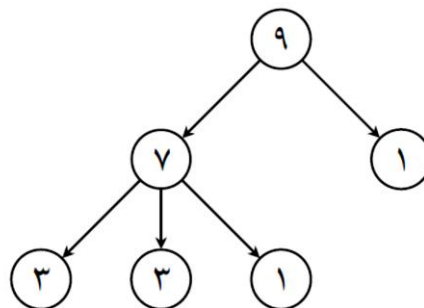
هر عدد باید حداکثر در یک رابطه، نقش فرزند را داشته باشد.

مجموع فرزندان هر عدد باید کمتر یا مساوی خودش باشد.

به یک عدد بدسگال می‌گوییم، اگر در هیچ رابطه‌ای فرزند نباشد. هدف، تعریف تعدادی رابطه بین اعداد دنباله است، طوری که تعداد عددهای

بدسگال کمینه شود. به عنوان مثال، اگر دنباله اعداد برابر $\langle 1, 1, 3, 3, 7, 9 \rangle$ باشد، می‌توانیم به شکل زیر، رابطه‌ها را طوری تعریف کنیم که فقط

یک عدد بدسگال داشته باشیم (هر پاره‌خط جهت‌دار نشان‌گر یک رابطه است که از پدر به فرزند کشیده شده است):



محاسبات و نکته‌های مهم



❖ با توجه به توضیحات صفحه قبل به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

۱۴- اگر دنباله اعداد برابر $(۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۵)$ باشد، حداقل چند عدد بدسگال خواهیم داشت؟

۵ (۵)

۱ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۵- الگوریتم‌های زیر را در نظر بگیرید:

(آ) دنباله اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند کوچک‌ترین پدر ممکن قرار می‌دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی‌دهیم و در نتیجه، بدسگال می‌شود).

(ب) دنباله اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند بزرگ‌ترین پدر ممکن قرار می‌دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی‌دهیم و در نتیجه، بدسگال می‌شود).

(پ) دنباله اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، با بررسی تمام حالات ایجاد رابطه بین این عدد و اعداد بدسگال کنونی کوچک‌تر از آن، بیشترین تعداد بدسگال ممکن را (مطابق با شرایط مسئله)، فرزند عدد فعلی قرار می‌دهیم.

کدام الگوریتم‌ها به ازای هر دنباله اولیه‌ای از اعداد، کمترین تعداد بدسگال ممکن را ایجاد می‌کنند؟

۵) فقط پ

۴) هیچ کدام

۳) هر سه

۲) آ و پ

۱) ب و پ



محاسبات و نکته‌های مهم

