

دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی و هشتمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۷	۶	۲۷۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.
- بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.



روز اول

۱- در دوزنقه متساوی الساقین ABCD (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهاست و دایره محیطی مثلث APB، BC را در X قطع می کند. خط گذرا از D و موازی با BC، AX را در Y قطع می کند. ثابت کنید:

$$\angle YDA = 2 \times \angle ACY$$

۲- فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوه دوی آنها را می نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به دست آمده را می توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

۳- فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند. دو دنباله اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

روز دوم

۴- همه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$$



محاسبات و نکته های مهم



۵- لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

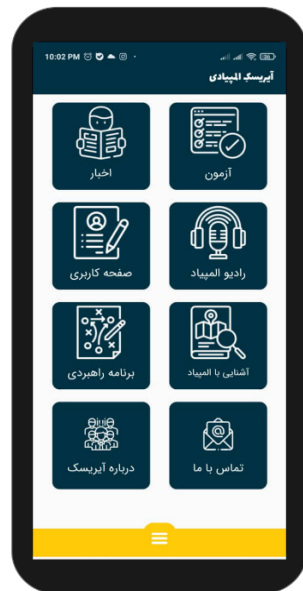
۶- دو دایره w_1 و w_2 یکدیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دلخواه که از P می‌گذرد w_1 و w_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا w_1 را در D و F و w_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیمساز زاویه $\angle XPY$ است.



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس های آنلاین

○ آزمون های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد ایریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad