

دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی و هفتمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۸	۶	۲۷۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.
- بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.



روز اول

۱- فرض کنید سطح داخلی چهار ضلع یک مستطیل از جنس آینه باشد. از یکی از نقاط گوشه‌ای پرتوی نوری به داخل مستطیل تابانده‌ایم. این پرتو بعد از چند بار انعکاس به رأس غیرمجاور رأس اول رسیده است و پیش از آن به هیچ یک از رئوس نرسیده است. ثابت کنید پرتوی نور پیش از این لحظه از مرکز مستطیل گذشته است. (توجه داشته باشید که هرگاه پرتوی نور به ضلعی برخورد می‌کند طوری منعکس می‌شود که زاویه تابش و زاویه بازتابش برابر باشند.)

۲- مثلث ABC متساوی الساقین ($AB = AC$) است و نقطه دلخواه X روی ضلع BC قرار دارد. نقاط Z و Y به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به طوری که $\angle YXB = \angle ZXC$. از B موازی با YZ رسم می‌کنیم تا XZ را در T قطع کند. ثابت کنید AT نیمساز زاویه A است.

۳- فرض کنید $n > 2$. ثابت کنید معادله زیر جوابی ندارد که در آن x_1, \dots, x_n اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ باشند.

$$(x_1 \dots x_n)^2 = x_1^3 + \dots + x_n^3$$



محاسبات و نکته‌های مهم

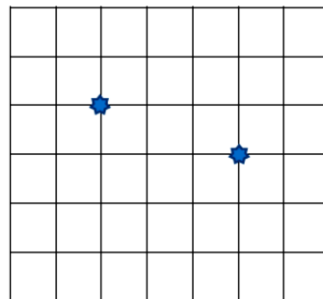


روز دوم ☀

۴- دایره‌ای به قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی دایره و دو طرف متفاوت AB قرار دارند. از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند و از C موازی با AD رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. نقاط A, B, C, D به گونه‌ای هستند که نقاط E و F درون دایره ایجاد شوند. عمود وارد از E بر AB ، BC را در X و عمود وارد از F بر AB ، BD را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید اندازه محیط مثلث AXY دو برابر طول پاره خط CD است.

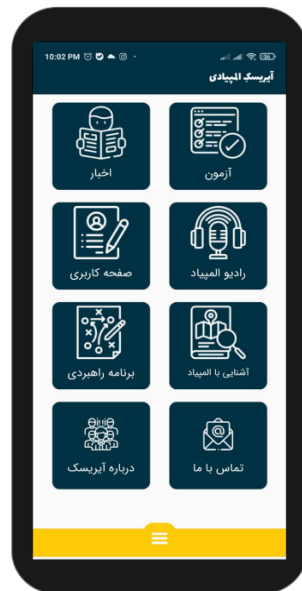
۵- چند جمله‌ای $1+x^{1398}$ روی تخته نوشته شده است. روزبه و کیوان به نوبت این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا نوبت روزبه است. هر بازیکن در نوبت خود یک عدد صحیح $0 \leq k \leq 1398$ انتخاب می‌کند و چند جمله‌ای روی تخته را با x^k جمع می‌کند. هر بار پس از اینکه کیوان حرکت خود را انجام داد اگر عدد حقیقی x موجود باشد که چند جمله‌ای روی تخته به ازای آن x منفی بشود، روزبه برنده می‌شود و کیوان می‌بازد و بازی تمام می‌شود. در غیر این صورت بازی ادامه می‌یابد. ثابت کند روزبه هر طور بازی کند کیوان می‌تواند به نحوی بازی کند که هیچ‌گاه نبازد.

۶- جدولی با ۵۶ نقطه در ۷ ردیف ۸ تایی، با فواصل برابر، در نظر بگیرید. دو نقطه از نقاط جدول را به عنوان نقاط قرینه‌ساز مشخص می‌کنیم؛ نقطه‌ای از جدول را در نظر بگیرید و آن را نسبت به یکی از نقاط قرینه‌ساز قرینه کنید. در صورتی که نقطه جدید یکی از نقاط جدول بود این کار را تکرار کنید و این تکرار را ادامه دهید. نقاطی که با این کار به آن‌ها می‌رسیم را در یک دسته قرار می‌دهیم. نقاط قرینه‌ساز را طوری انتخاب کرده‌ایم که تعداد دسته‌ها کمترین مقدار ممکن شود. تعداد دسته‌ها چند تا است؟ (در شکل زیر، ۵۶ نقطه همان تقاطع‌ها هستند و یکی از انتخاب‌های ممکن برای نقاط قرینه‌ساز با دو ستاره مشخص شده است).



محاسبات و نکته‌های مهم





○ آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس‌های آنلاین

○ آزمون‌های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد ایریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad