

دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی و هشتمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۹	روز اول ۳، روز دوم ۶	۲۷۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.
- بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.



روز اول

۱- فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های S را به m دسته‌ی A و B تقسیم کنیم به نحوی که هرگاه A و B در $A \cup B$ در یک دسته باشند آنگاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از فراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

۲- اعداد حقیقی و مثبت x, y و z با شرط $x + y + z = 1399$ مفروض‌اند. بیشترین مقدار عبارت

$$[x]y + [y]z + [z]x$$

چقدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

۳- دایره ω_1 با مرکز O_1 مفروض است. دایره ω_2 به مرکز O_2 از نقطه O_1 می‌گذرد و ω_1 را در نقاط A و B یکدیگر قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر ω_1 مماس است را l می‌نامیم. دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی l قرار دارد، ω_3 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینه P نسبت به l روی دایره ω_1 قرار دارد.



محاسبات و نکته‌های مهم



روز دوم

۱- مجموعه S با تعداد اعضای n مفروض است. می‌خواهیم تمام زیرمجموعه‌های S را به k دسته افزایش کنیم به طوری که اگر در یک دسته مجموعه‌های $A, B, A \cup B$ باشند، آنگاه $A = B$. حداقل تعداد دسته‌های لازم را پیدا کنید.

۲- فرض کنید x, y, z حقیقی مثبت هستند به طوری که $x + y + z = 1399$. بیشترین مقدار عبارت $[x]y + [y]z + [z]x$ را بیابید.

۳- دایره ω_1 با مرکز O_1 مفروض است. دایره ω_2 با مرکز O_2 از نقطه O_1 می‌گذرد و دو دایره در نقاط A, B یکدیگر را قطع می‌کنند. خط مماس بر دایره ω_1 در نقطه A را l می‌نامیم. دایره‌ای که مرکز آن روی خط l بوده و از نقاط O_1, O_2 می‌گذرد، دایره ω_2 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینه P نسبت به l روی دایره ω_1 قرار می‌گیرد.

۴- دو دایره ω_1, ω_2 در نقاط A, B تقاطع دارند. نقطه X روی ω_1 و نقطه Y روی ω_2 طوری قرار دارند که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. اگر قرینه B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D بنامیم. ثابت کنید:

$$\angle CAD < 90^\circ$$

۵- دو تایی a, b از اعداد طبیعی را مربع‌ساز می‌گوییم هرگاه $ab + 1$ مربع کامل باشد. تمام n های طبیعی را بیابید که مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ را بتوان به دو تایی‌های مربع‌ساز افزایش کرد.



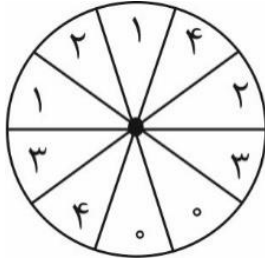
محاسبات و نکته‌های مهم



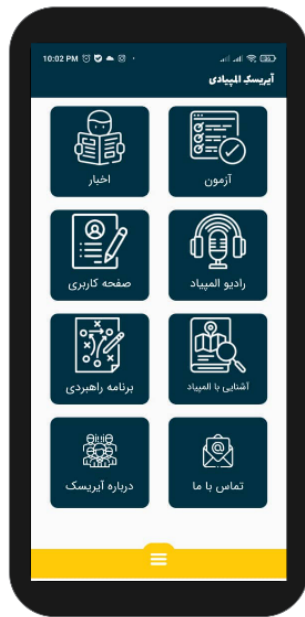
۶- دایره‌ای را به $2n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد $0, 1, 2, \dots, n-1$ را بنویسیم به طوری که:

- هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.
- برای هر عدد طبیعی $0 \leq i \leq n-1$ ، بین هر دو قطاع با شماره i ، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

ثابت کنید این کار برای $n = 1399$ امکان پذیر نمی‌باشد.



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاسهای آنلاین

○ آزمونهای آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد ایریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad