یاحق...

المپیادی شدن رؤیا نیست

از اول تا آخرش باهاتیم

آیریسک

کانون دانش‌پژوهان ایران

دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی‌ونهمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخگویی
۱۴۰۰	۶	۲۷۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

۱. این پاسخ‌نامه به‌صورت نیمه‌کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی‌که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳. پاسخ هر سؤال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴. با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.

۵. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به‌صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

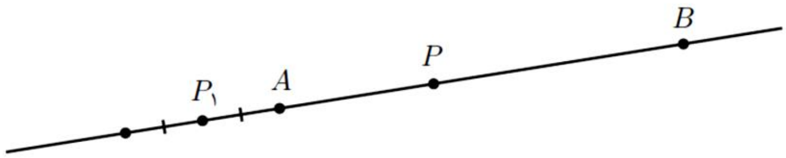
۶. از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸. شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.

۹. بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.

۱- روی خطی دو نقطهٔ متمایز A و B قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط AB، به غیر از نقاط A، B و وسط پاره‌خط AB، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطهٔ قرمز را نسبت به یکی از نقاط A و B قرینه می‌کنیم، سپس فاصلهٔ نقطهٔ جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطهٔ حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر P یک نقطهٔ قرمز باشد می‌توانیم P را نسبت به A قرینه کنیم سپس فاصلهٔ نقطهٔ حاصل تا A را نصف کنیم تا به نقطهٔ $P_۱$ برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطهٔ وسط AB قرمز شود؟

۲- عدد طبیعی n را خوب می‌نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری‌که عدد حاصل مقسوم‌علیه n شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می‌شود که مقسوم‌علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

۳- چهارضلعی محیطی ABCD با دایره محاطی w مفروض است. w در نقاط E و F بر BC و AD مماس است و DE برای بار دوم w را در X قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث DXF بر خطوط AB و CD مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی AFXC محاطی است.

۴- n نقطه روی محیط دایرهٔ w قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کمتر از w وجود دارد که همهٔ n نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از w وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همهٔ نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

۵- ۱۴۰۰ عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه تا از این اعداد مانند x، y و z وجود دارند که

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^۴+y^۴+z^۴+۱}\right| < \frac{۹}{۱۰۰۰}$$

۶- آیا چینشی از ۱۴۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری‌که حداقل یکی از اعداد ۲۰۲۱ باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم $c=(a,b)+(d,e)$.

محاسبات و نکته‌های مهم

سؤال ۱:

خط داده شده را محور اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم به طوری‌که A منطبق بر صفر و B منطبق بر ۲ باشد. فرض کنید پس از متناهی مرحله نقطهٔ ۱ قرمز شود. دقت کنید عمل عکسِ عکل تعریف شده در صورت مسئله به این شکل است: یکی از دو نقطهٔ A و B را نسبت به یکی از نقاط قرمز قرینه می‌کنیم، سپس نقطهٔ حاصل را نسبت به همان نقطه قرینه می‌کنیم. نقطهٔ حاصل نیز باید یک نقطهٔ قرمز باشد. پس اگر نقطهٔ x قرمز شده باشد طبق عمل عکس، در مرحلهٔ قبل باید یکی از نقاط $-2x$ و $6-2x$ قرمز شده باشند. از آنجا که ۱ قرمز شده است در مرحلهٔ قبل یکی از نقاط ۲- و ۴ قرمز شده‌اند. حال نشان می‌دهیم اگر نقطهٔ $x_1 \in (-\infty , 2] \cup [4,\infty)$ قرمز باشد نقاطی که در مراحل قبل از آن قرمز شده‌اند نیز همه باید در همین بازه قرار داشته باشند. طبق عمل عکس، در مرحلهٔ قبل از قرمز شدن x_1، یکی از دو نقطهٔ $-2x_1$ و $6-2x_1$ قرمز شده‌اند. حال دقت کنید که

$$6-2x_1 \le -2 \quad \text{یا} \quad 10 \le 6-2x_1 \quad \text{و} \quad -2x_1 \le -8 \quad \text{یا} \quad 4 \le -2x_1$$

پس $-2x_1$ و $6-2x_1$ نیز هر دو در بازهٔ $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$ قرار دارند. در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌توانیم از این بازه خارج شویم که با انتخاب اولین نقطهٔ قرمز در تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و نقطهٔ وسط AB پس از متناهی مرحله نمی‌تواند قرمز شود.

سؤال ۲:

فرض کنید n یک عدد خوب باشد. ارقام عدد طبیعی n را به شکل $\overline{abc}$ نشان می‌دهیم که b تنها یک رقم است که با حذف آن به یک مقسوم‌علیه n می‌رسیم اما a و c ممکن است از چند رقم تشکیل شده باشند. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $a \neq 0$، همچنین فرض کنید b از سمت راست رقم t اِم باشد. پس در واقع داریم $n = 10^t a + 10^{t-1} b + c$ و اگر رقم b را حذف کنیم به عددی $10^{t-1} a + c$ می‌رسیم. در نتیجه

$$\left.\begin{aligned} 10^{t-1} a + c &\,|\, 10^t a + 10^{t-1} c + c \\ 10^{t-1} a + c &\,|\, 10^t a + 10 c \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10^{t-1} a + c \mid 10^{t-1} b - 9c$$

دقت کنید که $|10^{t-1} b - 9c|$ حداکثر t رقم دارد. حال اگر a حداقل دو رقم داشته باشد، $10^{t-1} a + c$ حداقل $t+1$ رقم دارد پس تنها حالت ممکن این است که $10^{t-1} b - 9c$ برابر با صفر باشد. این نیز نتیجه می‌دهد $10^{t-1} \mid c$ که امکان ندارد زیرا $c < 10^{t-1}$. در نتیجه a باید یک رقم داشته باشد. توجه کنید که

$$20(10^{t-1} a + c) = 2 \times 10^t a + 20 c > 10^t a + 10^{t-1} b + c$$

پس اگر قرار دهیم $10^t a + 10^{t-1} b + c = k(10^{t-1} a + c)$، نتیجه می‌شود $k < 20$. از طرف دیگر می‌توان نوشت

$$10^{t-1} ((10-k) a + b) = c (k-1) \Rightarrow 10^{t-1} \mid c(k-1)$$

از آنجا که n رقم صفر ندارد c نسبت به حداقل یکی از دو عدد 2^{t-1} و 5^{t-1} اول است. اگر $(c, 2^{t-1}) = 1$ آنگاه طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

محاسبات و نکته‌های مهم

$$۲^{t-۱} \mid k-۱ \Rightarrow ۲^{t-۱} \le k-۱ < ۱۹ \Rightarrow t \le ۵$$

حالتی که $(c,۵^{t-۱}) = ۱$ نیز به طور مشابه نتیجه می‌دهد $t \le ۲$ پس n حداکثر ۶ رقمی است. حال به سراغ حالت $a = ۰$ می‌رویم. در این حالت داریم $n = ۱۰^{t-۱}b + c$ و با حذف b به عدد c می‌رسیم. در نتیجه

$$c \mid ۱۰^{t-۱}b + c \Rightarrow c \mid ۱۰^{t-۱}b$$

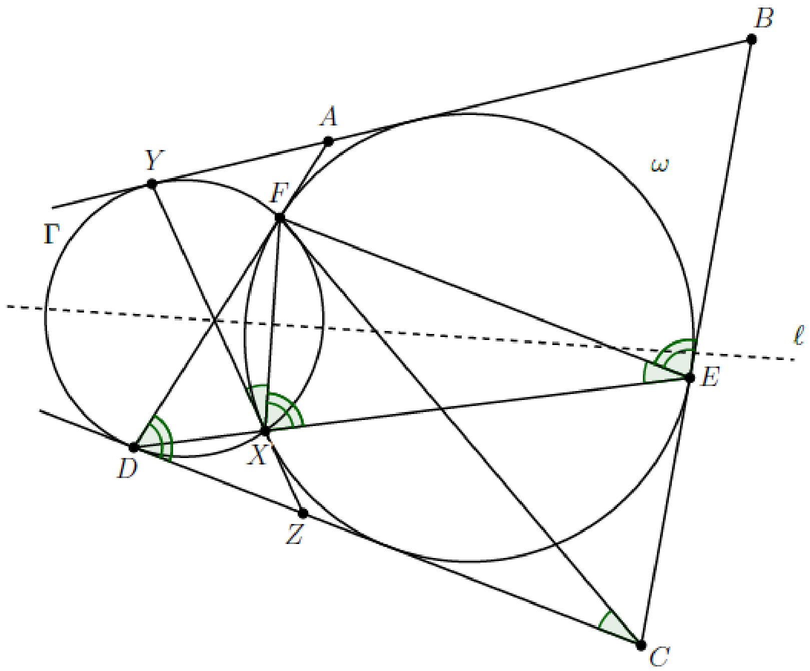
مشابه قبل دو حالت برای c داریم. اگر $(c,۲^{t-۱}) = ۱$ طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

$$c \mid ۵^{t-۱}b \Rightarrow ۱۰^{t-۲} \le c \le ۵^{t-۱}b \le ۵^{t-۱} \times ۹ \Rightarrow ۲^{t-۲} \le ۴۵ \Rightarrow t \le ۷$$

برای حالت $(c,۵^{t-۱})$ نیز مشابهاً نتیجه می‌شود $t \le ۳$ پس n حداکثر ۷ رقم دارد و تعداد اعداد خوب متناهی است.

سؤال ۳.

دایره محیطی مثلث DXF را Γ و عمودمنصف FX را ℓ می‌نامیم. دقت کنید که خطوط AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دوایر Γ و w هستند، پس نسبت به ℓ قرینه یکدیگرند. فرض کنید AB در Y بر Γ مماس باشد و Z قرینه A نسبت به ℓ باشد. اگر خط FD را نسبت به ℓ قرینه کنیم به خط XY تبدیل می‌شود پس از آنجا که FD از A می‌گذرد، XY نیز از خط می‌گذرد.



واضح است که چهارضلعی AFXZ ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس چهار نقطه A، F، X و Z روی یک دایره قرار دارند و اگر نشان دهیم دایره محیطی مثلث FXZ از C می‌گذرد حکم ثابت می‌شود. دقت کنید که

محاسبات و نکته‌های مهم

$$\angle BEF = \angle FXE = \frac{FXD}{۲} = \angle FDC$$

پس چهارضلعی FECD محطی است. در نتیجه

$$\angle FCZ = \angle FCD = \angle FED = \angle FEX = \angle FXY = ۱۸۰^\circ - \angle FXZ$$

که محاطی بودن چهارضلعی FXZC را نشان می‌دهد و حکم نتیجه می‌شود.

سؤال ۴.

فرض کنید O مرکز w و O' مرکز دایرهٔ با شعاع کمتر باشد. از O خطی عمود بر OO' رسم می‌کنیم تا w را در A و B قطع کند. نشان می‌دهیم AB قطر مورد نظر است. فرض کنید نقطهٔ P طرف دیگر AB نسبت به O' یا روی آن قرار داشته باشد. واضح است که $\angle POO' \geq ۹۰^\circ$ در نتیجه $PO' > PO$. پس P نمی‌تواند یکی از n نقطه باشد زیرا فاصلهٔ هر یک از این نقاط از O' کمتر از فاصلهٔ آن از O است. این نتیجه می‌دهد همهٔ نقاط همان طرف AB قرار دارند که O' قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

سؤال ۵.

قرار دهید $c = \frac{۹}{۱۰۰۰}$ و $n = ۱۴۰۰$. فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم برای هر سه عدد x، y و z که $z \geq y \geq x$ داشته باشیم

$$(z-y)(y-x)(z-x) \geq c(x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۱) \qquad (۱)$$

دقت کنید که برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $(a+b)^۲ \geq ۴ab$، زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$ که درستی آن واضح است. حال با استفاده از این نامساوی می‌توان نوشت

$$(z-x)^۲ \geq ۴(z-y)(y-x) \Rightarrow (z-x)^۳ \geq ۴(z-y)(y-x)(z-x) \qquad (۲)$$

$$\overset{(۱)}{\geq} ۴c(x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۱)$$

$$\geq ۴c(x^۴ + z^۴ + ۱)$$

توجه کنید که نامساوی آخر نتیجه می‌دهد

$$z - x \geq \sqrt[۳]{۴c} \qquad (۳)$$

همچنین از طرف دیگر طبق (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{(z-x)^۳}{x^۴ + z^۴} > ۴c \qquad (۴)$$

دقت کنید که $(a+b)^۲ \le ۲(a^۲+b^۲)$ زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \ge ۰$. با دو بار استفاده از این نامساوی نتیجه می‌شود

$$(z-x)^۴ \le (x^۲+z^۲) \le ۸(x^۴+z^۴) \overset{(۴)}{\Rightarrow} \frac{۸}{z-x} > ۴c \Rightarrow z-x < \frac{۲}{c} \qquad (۵)$$

حال فرض کنید اعداد داده شده $x_۱ \le x_۲ \le \cdots \le x_n$ باشند. از (۳) نتیجه می‌شود $x_{k+۲} - x_k > \sqrt[۳]{۴c}$ در نتیجه

$$\frac{۲}{c} > x_n - x_۱ > \left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor \sqrt[۳]{۴c} \Rightarrow c < \frac{۲^{\frac{۱}{۴}}}{\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor^{\frac{۳}{۴}}} \approx \frac{۸۷}{۱۰۰۰۰}$$

که تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

سؤال ۶:

فرض کنید ب.م.م همه اعداد دور دایره برابر با k باشد. در این صورت اگر همه اعداد را بر k تقسیم کنیم چینش جدید نیز خواص مسئله را دارد و تنها تفاوت آن این است که حداقل یکی از اعداد برابر با یکی از مقسوم‌علیه‌های ۲۰۲۱ است. پس فرض می‌کنیم ب.م.م اعداد دور دایره برابر با ۱ است.

لم ۱. ب.م.م هر سه عدد متوالی برابر با ۱ است.

برهان. فرض کنید a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند و سه عدد a، b و c عامل مشترک p را داشته باشند. از تساوی $c=(a,b)+(d,e)$ نتیجه می‌شود d و e نیز بر p بخش‌پذیرند و به همین ترتیب همه اعداد دور دایره بر p بخش‌پذیر می‌شوند، پس p باید برابر با ۱ باشد و این یعنی ب.م.م هر سه عدد متوالی ۱ است.

لم ۲. اگر a، b و c سه عدد متوالی دور دایره باشند آنگاه $c>(a,b)$.

برهان. از شرط مسئله و این‌که ب.م.م همواره عددی مثبت است حکم نتیجه می‌شود.

فرض کنید m عدد بیشینه بین تمام اعداد دور دایره باشد و x، m، z و t به همین ترتیب دور دایره قرار داشته باشند. از آنجا که مجموع دو عدد طبیعی حداقل ۲ است، ۱ نمی‌تواند در بین اعداد دور دایره ظاهر شود. همچنین $m>۴$ است زیرا ۲۰۲۱ بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۴ بخش‌پذیر نیست. طبق تساوی $m=(x,y)+(z,t)$ یکی از اعداد (x,y) و (z,t) باید حداقل $\frac{m}{۲}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $(x,y) \ge \frac{m}{۲}$. اگر $x \ne y$ آنگاه یکی از دو عدد حداقل m است و از آنجا که m عدد بیشینه بود باید برابر با m باشد. طبق لم ۲، y نمی‌تواند برابر با m باشد پس باید داشته باشیم $y=\frac{m}{۲}$ و $x=m$. این نیز نتیجه می‌دهد $(z,t)=\frac{m}{۲}$. مشابه قبل z نمی‌تواند برابر با m باشد پس $z=\frac{m}{۲}$. اما از آنجا که y، m و z متوالی هستند طبق لم ۲ به تناقض می‌رسیم. پس فرض $x \ne y$ باطل می‌شود و باید داشته باشیم $x=y \ge \frac{m}{۲}$ حال فرضی کنید عدد قبل از x، w باشد. از لم ۱ نتیجه می‌شود $(w,x)=۱$ پس می‌توان نوشت

محاسبات و نکته‌های مهم

$$x=(w,x)+(m,z)=۱+(m,z)\ \Rightarrow\ x-۱\mid m$$

اگر m فرد باشد، از آنجا که $\frac{m+۱}{۲}\le x\le m$ باد داشته باشیم $\frac{m}{۲}\le\frac{m-۱}{۲}$ که نتیجه می‌دهد $m\le ۳$ و این با فرض $m>۴$ در تناقض است.

پس m باید زوج باشد و از آنجا که $\frac{m}{۲}\le x\le m$ تنها حالت ممکن $x=\frac{m}{۲}+۱$ است. پس $(m,z)=\frac{m}{۲}$ که نتیجه می‌دهد $z=\frac{m}{۲}$. از طرف دیگر داریم

$$m=(x,x)+(z,t)=\frac{m}{۲}+۱+(\frac{m}{۲},t)\ \Rightarrow\ \frac{m}{۲}-۱\mid\frac{m}{۲}\Rightarrow\frac{m}{۲}-۱\mid ۱\Rightarrow\ m=۴$$

که این نیز با فرض $m>۴$ در تناقض است. پس چنین چینشی وجود ندارد.

محاسبات و نکته‌های مهم

- آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی
- اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور
- مشاوره و کلاس‌های آنلاین
- آزمون‌های آنلاین المپیاد
- معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین

برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد آیریسک" را جستجو کنید.