

## دفترچه سؤالات مرحله دوم

# چهلمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۱	۶	۲۷۰ دقیقه

### توضیحات مهم

#### استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.
- بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.



۱- مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه‌ای که  $DE \parallel BC$ . حال خطی به نام L از A موازی با BC رسم می‌کنیم و قرینه D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می‌نامیم. ثابت کنید که E'C و D'B و L هم‌رسند.

۲- همه تابع‌های  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم:

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y)$$

۳- خانه‌های یک جدول  $n \times n$  به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده‌اند. به ازای چه n‌هایی می‌توان خانه‌های جدول را با اعداد  $1, 2, 3, \dots, n$  به گونه‌ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) در هر سطر تمامی اعداد  $1, 2, 3, \dots, n$  آمده باشد و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.

(ب) در هر ستون تمامی اعداد  $1, 2, 3, \dots, n$  آمده باشد و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.

۴- در یک جدول  $n \times n$  بعضی از خانه‌ها سیاه شده‌اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق‌های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همه خانه‌های جدول خود هستند.

روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانه سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.

روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانه سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن را به طور کامل قرمز می‌کند.

ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همه خانه‌های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همه خانه‌های جدولش را قرمز کند.



محاسبات و نکته‌های مهم



۵- دنباله  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که  $a_1 = 2$  و برای هر  $n \geq 1$  داریم:

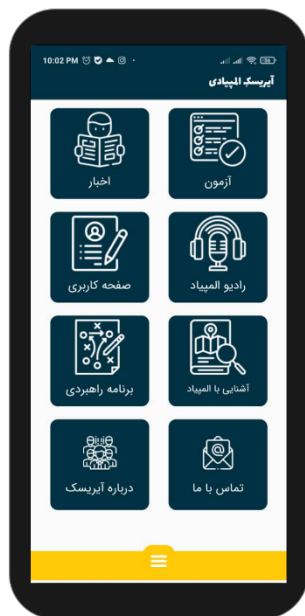
$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times a_n$$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی  $n$  وجود دارد که  $\frac{1}{n+1} \times a_n \times a_{n-1} \times \dots \times a_1$  عددی طبیعی و مربع کامل است.

۶- در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ،  $(BA = BC)$  نقطه  $P$  روی ارتفاع رأس  $B$  به صورت دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایره  $APB$  خط  $AC$  را برای بار دوم در  $M$  قطع می‌کند. قرینه  $M$  نسبت به وسط  $AC$  را  $N$  می‌نامیم. خط  $NP$  دایره  $APB$  را در نقطه  $X$  ( $X \neq P$ ) و خط  $AB$  دایره  $APN$  را در نقطه  $Y$  ( $Y \neq A$ ) قطع می‌کند. مماس در  $A$  بر دایره  $APN$ ، در نقطه  $Z$  با خط  $BP$  برخورد می‌کند. ثابت کنید که  $CZ$  بر دایره محیطی مثلث  $PXY$  مماس است.



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس های آنلاین

○ آزمون های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا  
"المپیاد ایریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad