دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی‌وچهارمین المپیاد فیزیک

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۰	۶	۲۴۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آن‌گاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید.

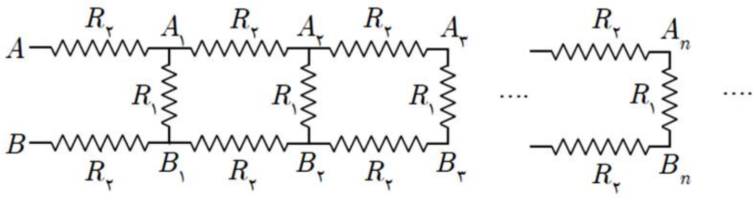
۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می‌شوند.

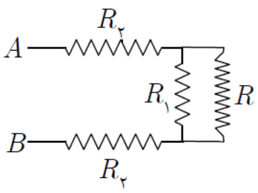
۹- هر سؤال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

۱) در مدار شکل ۱، الگوی متفاوت‌های $R_2-R_1-R_2$ بین دو نقطهٔ A و B بی‌نهایت بار تکرار می‌شود.



شکل ۱

چون الگوی سه مقاومت تا بی‌نهایت تکرر می‌شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی‌کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطهٔ A و B برابر R باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می‌شود.



شکل ۲

آ) مقاومت R بین دو نقطهٔ A و B را برحسب R_1 و R_2 به دست آورید.

در بخش‌های زیر فرض کنید منبع ولتاژ V_0 را به دو سر A و B وصل کرده‌ایم.

ب) ولتاژ V_1 بین A_1 و B_1 در مدار شکل ۱ برحسب V_0، R_2 و R چقدر است؟

پ) ولتاژ بین A_n و B_n روی دو سر n امین R_1 در مدار شکل ۱ برحسب V_0، R_2، R و n چقدر است؟

ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت‌های R_1 را با P_1 نشان می‌دهیم. P_1 را برحسب V_0، R_1 و R_2 به دست آورید.

ث) با فرض آن‌که $x=\frac{R_1}{R_2}$ و $y=\frac{P_1}{P}$ که P توان کل مصرفی در مدار است، رابطهٔ y برحسب x را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

۲) در پدیدهٔ دوپلر اگر یک چشمهٔ صوتی متحرک با بسامد f_s با سرعت لحظه‌ای v_s حرکت کند، بسامد دریافت شده توسط یک گیرندهٔ ساکن $f=f_s\frac{u}{u\pm u_s}$ است که u سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود. در صورتی‌که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد f_s در لحظهٔ t' از چشمه منتشر شود، در لحظهٔ متفاوت t توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت v_s در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظهٔ t' است و f بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظهٔ t است.

محاسبات و نکته‌های مهم

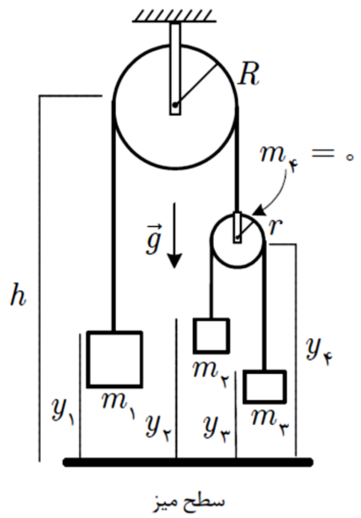
حل فرض کنید یک چشمهٔ صوتی با بسامد f_s از ارتفاع h از سطح زمین در لحظه $t'=0$ از حال سکون رها شود. گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد f(t) دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند. فرض کنید چشمه در زمان t' بعد از رها شدن، صوت با بسامد f_s منتشر می‌کند. شتاب گرانش را g بگیرید و از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

آ) زمان t' را برحسب u، g، h و t به دست آورید.

ب) سرعت چشمه در زمان t' یعنی $v_s(t')$ را برحسب u، g، h و t به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرندهٔ روی زمین در زمان t، یعنی f(t) را برحسب f_s، u، g، h و t به دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید $\frac{1}{f^2}=A+Bt$ و A و B را برحسب f_s، u، g و h تعیین کنید.



۳) سه جسم به جرم‌های m_1، m_2 و m_3 به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل‌اند. قرقرهٔ متحرک را جسم چهارم به جرم $m_4=0$ در نظر بگیرید. قرقرهٔ ثابت و نخ‌ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش g، شعاع قرقرهٔ ثابت R، شعاع قرقرهٔ متحرک r، طول نخ روی قرقرهٔ ثابت D و طول نخ روی قرقرهٔ متحرک d است. در لحظهٔ $t=0$ در حالی که جرم‌ها در فواصل اولیهٔ y_{10}، y_{20}، y_{30} و y_{40} از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب a_1، a_2، a_3 و a_4 است.

آ) ارتفاع جرم‌ها از سطح میز در لحظهٔ دلخواه t را به ترتیب y_1، y_2، y_3 و y_4 بگیرید. D و d را برحسب این کمیت‌ها، h فاصلهٔ مرکز قرقرهٔ ثابت از سطح میز، R و r بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آورید، به ازای $i=1,2,3,4$، هر کدام از y_iها را برحسب زمان، شتاب مربوطهٔ a_i و فاصلهٔ اولیه از سطح میز y_{i0} بنویسید.

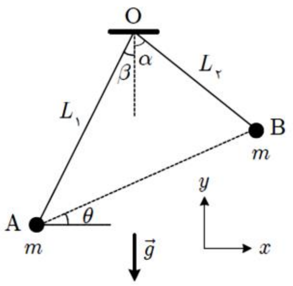
پ) روابط قسمت ب را برای لحظهٔ $t=0$ بنویسید و با ترکیب نتیجهٔ به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطهٔ مستقل بین شتاب‌ها به دست آورید.

محاسبات و نکته‌های مهم

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های m_1، m_2، m_3 و قرقرهٔ متحرک بنویسید و با استفاده از رابطهٔ بین شتاب‌ها که در قسمت پ به دست آورید، کلیهٔ شتاب‌ها و کشش نخ‌ها را برحسب جرم‌ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم m_2 چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟

ج) با فرض $y_{20} = y_{30}$، مدت زمانی که طول می‌کشد تا لبهٔ بالایی جسم m_2 هم‌تراز با پایین‌ترین نقطهٔ قرقره متحرک شود، چقدر است؟



۴) دو گلولهٔ کوچک هر یک به جرم m دارای بار الکتریکی هم‌نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول‌های L_1 و L_2 متصل‌اند. دو انتهای دیگر نخ‌ها به تکیه‌گاهی واقع در نقطهٔ O بسته شده‌اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله‌ها به گونه‌ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعهٔ الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویهٔ α معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای هر یک از گلوله‌ها برحسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α، β، θ، اندازهٔ نیروی دافعهٔ کولنی F، mg و نیروی کشش نخ‌ها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ، $\tan\theta$ را برحسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β به دست آورید.

پ) طول پاره‌خط AB را d بنامید. $d\sin\theta$ و $d\cos\theta$ را برحسب L_1، L_2 و توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β بنویسید.

ت) زاویهٔ β را برحسب $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویهٔ α به دست آورید.

ث) نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها را برحسب mg، $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویهٔ α به دست آورید.

ج) به ازای $\frac{L_2}{L_1} = 1$ نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها چقدر است؟

چ) فرض کنید طول نخ‌ها به اندازه‌ای است که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ باشد. نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها و اندازهٔ نیروی دافعهٔ کولنی را برحسب mg به دست آورید.

محاسبات و نکته‌های مهم

۵) چرخهٔ ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند n مول گاز کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های T_0 و P_0 معلوم‌اند. ثابت گازها R است.

انرژی داخلی n مول گاز کامل تک‌اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است.

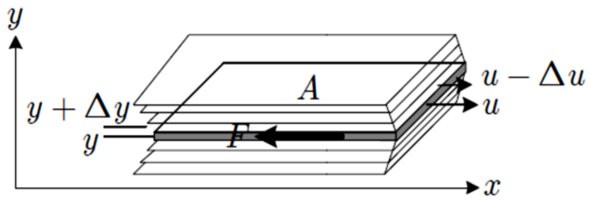
آ) چرخه را در صفحهٔ $P-V$ رسم کنید و مختصات (P,V,T) نقاط متناظر با شش نقطهٔ نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب n، R و T_0 به دست آورید. این کار مثبت است یا منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای ۲ ← ۱، ۳ ← ۲، ۴ ← ۳، ۵ ← ۴، ۶ ← ۵ و ۱ ← ۶ گاز از محیط گرما می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را برحسب n، R و T_0 به دست آورید.

ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

۶) گرانروی (Viscosity) خاصیتی از یک سیال است که باعث کندی حرکت اجسام نسبت به سیال می‌شود. سیال را به صورت لایه‌هایی با ضخامت ناچیز Δy در نظر بگیرید. اگر جسمی در راستای x با سرعت u در داخل یک سیال حرکت کند، لایه‌ای از سیال که در مجاورت آن است تقریباً همراه آن کشیده می‌شود. لایه‌های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانروی به حرکت در می‌آیند و هر چه در جهت عمود بر لایه‌های متحرک (راستای y در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن‌ها کمتر می‌شود. به بیان دیگر اگر Δu اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد، $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با سیال A باشد نیروی اصطکاک F در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ $F=\eta A\left|\frac{\Delta u}{\Delta y}\right|$ به دست می‌آید. در این رابطه، η ضریب گرانروی نامیده می‌شود.



آ) واحد ضریب گرانروی در دستگاه واحدهای SI را برحسب پاسکال و سایر کمیت‌های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع r با سرعت u در داخل یک سیال گرانرو حرکت کند می‌توان نشان داد نیروی اصطکاک $F=6\pi\eta ru$ به آن وارد می‌شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می‌شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانروی را می‌توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

محاسبات و نکته‌های مهم

ب) یک جسم کروی به شعاع r و چگالی ρ داخل سیالی به چگالی ρ' $(\rho < \rho')$ و ضریب گرانروی η سقوط می‌کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می‌رسد که به آن سرعت حد می‌گوییم. این سرعت را بر حسب ρ، ρ'، η، r و g به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطرهٔ کوچک کروی آب به قطر $0{,}40\ \mathrm{mm}$ را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر $0{,}12\ \mu\mathrm{m}$ و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطرپاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکترود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیهٔ قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازهٔ زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطرهٔ روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

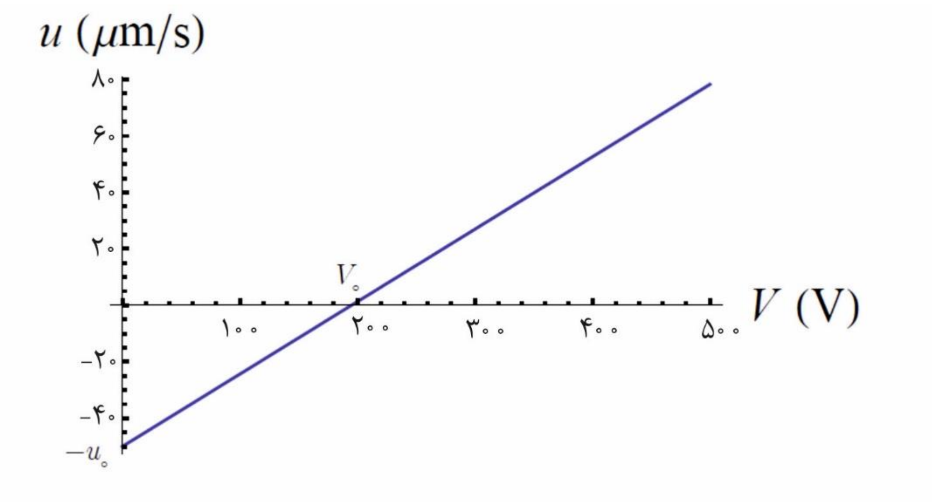
ت) در شکل زیر رابطهٔ خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحهٔ بالایی به اندازهٔ V از صفحهٔ پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا u مثبت و در حرکت به سمت پایین u منفی فرض شده است. اگر V_0 و $-u_0$ به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطهٔ خطی u بر حسب V باشد، شعاع قطرهٔ روغن و بار روی آن را برحسب u_0، V_0، η (ضریب گرانروی هوا)، ρ_a (چگالی هوا)، ρ_0 (چگالی روغن)، g (شتاب گرانش) و d (فاصلهٔ عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی V_0، u_0 از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.

محاسبات و نکته‌های مهم

داده‌های عددی:

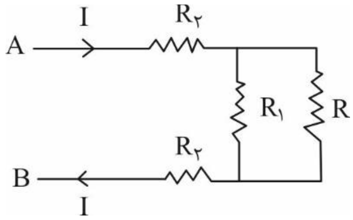
(روغن) $\rho_o = ۸۸۰\ \mathrm{kg/m^۳}$، (هوا) $\rho_a = ۱/۲\ \mathrm{kg/m^۳}$، (آب) $\rho_w = ۱۰۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$، $d = ۸/۰\ \mathrm{mm}$، $g = ۹/۸\ \mathrm{m/s^۲}$، (در دستگاه SI) $\eta = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$.



محاسبات و نکته‌های مهم

بخش پاسخ تشریحی:

۱) آ



$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \qquad (1)$$

ب)

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2I$$

$$\boxed{V_1 = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

پ)

$$V_2 = V_{A_2B_2} = V_1 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2$$

$$\boxed{V_n = V_{A_nB_n} = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

ت) توان مصرفی در n امین R_1 را با $P_n^{(R_1)}$ نشان می‌دهیم

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در تمام R_1ها:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n} = \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R^2}{R}\right)^2} \qquad (2)$$

با قرار دادن R از معادله (۱) در (۲) و ساده کردن جواب:

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2 \left(R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}\right)}{2R_1\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

محاسبات و نکته‌های مهم

ث) توان کل مصرفی در مدار

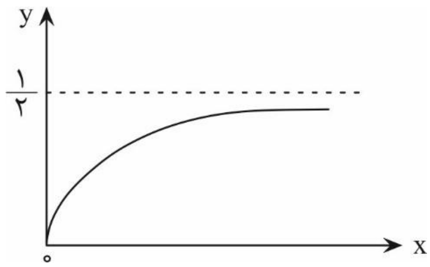
$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

پس از ساده کردن y در معادلهٔ $y = \frac{P_1}{P}$ به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

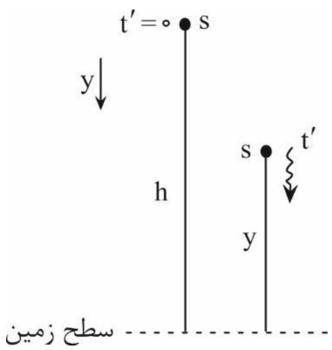
$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}\right)$$

اگر $\frac{R_1}{R_2}$ را x بنامیم $x = \frac{R_1}{R_2}$ و

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)}$$



۲) آ) چشمه در لحظهٔ $t' = 0$ در ارتفاع h از سطح زمین و در لحظهٔ t' در ارتفاع y از سطح زمین است و سرعت آن v_S است.



$$v_S = gt' \quad , \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظهٔ t' ارسال می‌شود و در لحظهٔ t به گیرنده روی زمین می‌رسد.

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادلهٔ اخیر

$$gt'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0 \qquad \boxed{t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}}$$

ب) $\boxed{u_S(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$

پ) $f(t) = f_S \frac{u}{u - u_S(t)} \qquad \boxed{f(t) = f_S \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h-ut)}}}$

محاسبات و نکته‌های مهم

ت) داریم $\frac{1}{f_{(e)}^2} = \frac{1}{f_s^2}\left(1+\frac{2gh}{u^2}-\frac{2gt}{u}\right)$ در نتیجه

$$\boxed{A = \frac{1}{f_s^2}\left(1+\frac{2gh}{u^2}\right) \quad , \quad B = -\frac{2g}{uf_s^2}}$$

۳) آ)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (h-y_1)+\pi R+(h-y_4) \\ d &= (y_4-y_2)+\pi r+(y_4-y_3) \end{aligned}}$$

ب) $D = (h-\frac{1}{2}a_1t^2-y_{10}) + \pi R + (h-\frac{1}{2}a_4t^2-y_{40})$

$$d = (\frac{1}{2}a_4t^2 + y_{40} - \frac{1}{2}a_2t^2 - y_{20}) + \pi r + (\frac{1}{2}a_4t^2 + y_{40} - \frac{1}{2}a_3t^2 - y_{30})$$

پ) روابط قسمت (آ) برای لحظهٔ $t=0$ نیز باید درست باشند یعنی

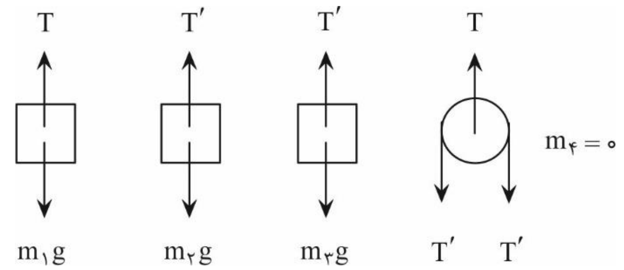
$$D = (h-y_{10})+\pi R+(h-y_{40})$$

$$d = (y_{40}-y_{20})+\pi r+(y_{40}-y_{30})$$

از مقایسه با روابط قسمت (ب) باید

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a_1t^2-\frac{1}{2}a_4t^2 = 0 \\ a_4t^2-\frac{1}{2}a_2t^2-\frac{1}{2}a_3t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_4 = 0 \\ 2a_4-a_2-a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a_1-a_2-a_3 = 0 \qquad (1)$$

ت) نمودار جسم آزاد



$T-m_1g = m_1a_1$ (۲) , $T'-m_2g = m_2a_2$ (۳) , $T'-m_3g = m_3a_3$ (۴) , $T-2T'-(0)g = (0)\,a_4$

$T' = T/2$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در $2m_2m_3$، $m_1 m_3$ و $m_1 m_2$ ضرب و پس با هم جمع کنیم، با توجه به (۱) خواهیم داشت.

$$2\, m_2m_3(T-m_1g) + m_1 m_3 \left(\frac{T}{2}-m_2g\right) + m_1 m_2 \left(\frac{T}{2}-m_3g\right) = 0$$

$$T = \frac{8 m_1 m_2 m_3\, g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} \quad , \quad T' = \frac{T}{2}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲) و (۳) و (۴):

$$a_1 = \frac{4 m_2 m_3 - m_1 m_2 - m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g \qquad a_2 = \frac{3 m_1 m_3 - m_1 m_2 - 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3 m_1 m_2 - m_1 m_3 - 4 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g \qquad a_4 = -a_1$$

ث) برای این‌که $a_2 > 0$ باید

$$\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}$$

ج) وقتی

$$y_{20} + \frac{1}{2}(d-\pi r) = y_{40} \quad : \quad y_{20} = y_{30}$$

می‌خواهیم

$$y_2(t) = y_4(t) - r$$

$$\frac{1}{2}a_2t^2 + y_{20} = \frac{1}{2}a_4t^2 + y_{40} - r$$

در نتیجه

$$(a_2 - a_4)t^2 = d - r(2+\pi)$$

$$\frac{2(m_1 m_3 - m_1 m_2)\, g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}\, t^2 = d - r(2+\pi)$$

که باید $m_3 > m_2$.

در نتیجه:

$$t = \sqrt{\frac{d - r(2+\pi)}{2g} \; \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}{m_1 (m_3 - m_2)}}$$

۴) آ) برای جرم m سمت راستی

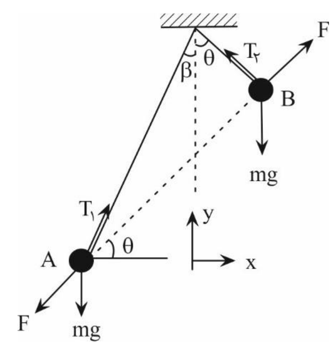
$$x: \quad F\cos\theta - T_2 \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$y: \quad F\sin\theta + T_2 \cos\alpha - mg = 0 \qquad (2)$$

برای جرم m سمت چپی

$$x: \quad -F\cos\theta + T_1 \sin\beta = 0 \qquad (3)$$

$$y: \quad -F\sin\theta + T_1 \cos\beta - mg = 0 \qquad (4)$$



ب) با قرار دادن T_2 از معادله (۱) در معادله (۲)

$$F(\sin\theta + \cos\theta\cot\alpha) = mg \qquad (۵)$$

و با قرار دادن T_1 از معادله (۳) در معادله (۴)

$$F(-\sin\theta + \cos\theta\cot\beta) = mg \qquad (۶)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\tan = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha) \qquad (۷)$$

پ)

$$d\sin\theta = L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha$$

$$d\cos\theta = L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan\theta = \frac{L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha}{L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha} \qquad (۸)$$

ت) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\sin\beta = \frac{L_2}{L_1}\sin\alpha \qquad (۹)$$

ث) با قرار دادن $\sin\beta$ از معادله (۹) در معادلهٔ (۷)

$$\tan\theta = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} - \cos\alpha\right) \qquad (۱۰)$$

با حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha + \cos\alpha} \qquad (۱۱)$$

و با حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha + \cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن (۱۰) در (۱۱)

محاسبات و نکته‌های مهم

$$T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-(\frac{L_2}{L_1})^2 \sin^2\beta} + \cos\alpha} \qquad (13)$$

با قرار دادن (۱۰) در (۱۲) و استفاده از معادله (۹)

$$T_1 = \frac{2mg(\frac{L_1}{L_2})}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-(\frac{L_2}{L_1})^2 \sin^2\alpha} + \cos\alpha} \qquad (14)$$

ج) به ازای $L_1 = L_2$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

چ) به ازای $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواهیم

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

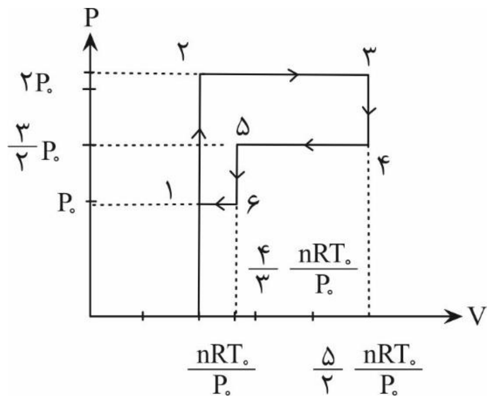
با قرار دادن $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha} + \cos\alpha} = mg \quad , \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}\,mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha} + \cos\alpha} = \sqrt{3}\,mg$$

از معادله (۱۰) به دست می‌آید $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه

$$F = T_2 = mg$$

۵) آ) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P برحسب T شیب (ضریب زاویه)، $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط دارای شیب یکسان هم حجم هستند.



نقطهٔ (۱) $(P_0 , \frac{nRT_0}{P_0} , T_0)$

نقطهٔ (۲) $(2P_0 , \frac{nRT_0}{P_0} , 2T_0)$

نقطهٔ (۳) $(2P_0 , \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} , 5T_0)$

نقطهٔ (۴) $(\frac{3}{2}P_0 , \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} , \frac{15}{4}T_0)$

نقطهٔ (۵) $(\frac{3}{2}P_0 , \frac{4}{2}\frac{nRT_0}{P_0} , 2T_0)$

نقطهٔ (۶) $\quad (P_{۰}\,,\ \frac{۴}{۳}\frac{nRT_{۰}}{P_{۰}}\,,\ \frac{۴}{۳}T_{۰})$

ب) کار چرخه منفی مساحت داخل چرخه، $|w|$، در صفحه $P-V$ است.

$$|w|_{\text{چرخه}} = (\frac{۵}{۲}\frac{nRT_{۰}}{P_{۰}} - \frac{nRT_{۰}}{P_{۰}})\frac{P_{۰}}{۲} + (\frac{۴}{۳}\frac{nRT_{۰}}{P_{۰}} - \frac{nRT_{۰}}{P_{۰}})\frac{P_{۰}}{۲}$$

w چرخه منفی است.

$$|w| = \frac{۱۱}{۱۲}nRT_{۰}$$

پ) اگر Q گرمای داده شده بر گاز در یک چرخه باشد در فرآیندهای ۲ $\to$ ۱ و ۳ $\to$ ۲ گاز از محیط گرما می‌گیرد:

$$Q = Q_{۱\to۲} + Q_{۲\to۳}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_{۲} - U_{۱} = W_{۱\to۲} + O_{۱\to۲}$$

$$\frac{۳}{۲}nR(۲T_{۰}) - \frac{۳}{۲}nRT_{۰} = ۰ + Q_{۱\to۲} \quad \Rightarrow \quad Q_{۱\to۲} = \frac{۳}{۲}nRT_{۰}$$

$$U_{۳} - U_{۲} = w_{۲\to۳} + Q_{۲\to۳}$$

$$\frac{۳}{۲}nR(ST_{۰}) - \frac{۳}{۲}nR(۲T_{۰}) = -(۲P_{۰})(\frac{۵}{۲}\frac{nRT_{۰}}{P_{۰}} - \frac{nRT_{۰}}{P_{۰}}) + O_{۲\to۳}$$

$$O_{۲\to۳} = \frac{۱۵}{۲}nRT_{۰}$$

بنابراین

$$Q = \frac{۳}{۲}nRT_{۰} + \frac{۱۵}{۲}nRT_{۰} \qquad Q = ۹nRT_{۰}$$

ت)

$$\text{بازده} = \frac{|w|_{\text{چرخه}}}{Q_{\text{گرمای داده شده}}} = \frac{۱۱}{۱۲}\,\frac{۱}{۹} \approx ٪۱۰$$

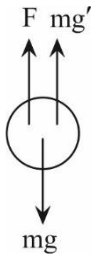
$$\text{بازده} = \frac{۱۱}{۱۰۸} \approx ٪۱۰$$

۶) آ)

$$\frac{F}{A} = \eta\left|\frac{\Delta u}{\Delta y}\right| \Rightarrow P_a = (\eta\ \text{واحد})\ (\frac{\frac{m}{s}}{m}) \qquad (\eta\ \text{واحد}) = P_a \cdot s$$

محاسبات و نکته‌های مهم

ب) بعد از رسیدن به سرعت حد شتاب جسم صفر است، در نتیجه



$$F+m'g-mg=0 \quad (a)$$

F : نیروی اصطکاک

$$6\pi r\eta u_{\text{حد}}+\frac{4}{3}\pi r^3\rho' g-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=0$$

m′g : نیروی شناوری

$$u_{\text{حد}}=\frac{2}{9}\frac{(\rho-\rho')g}{\eta}r^2$$

mg : نیروی گرانش

پ) برای قطرهٔ آب به شعاع $r=0/2\ \text{mm}$ که در هوا $\rho'=\rho_a$ سقوط می‌کند.

$$u_{\text{حد}}=\frac{2}{9}\frac{(\rho_w-\rho_a)}{\eta}r^2=\frac{2}{9}\frac{(1000-1/2)(9/8)}{1/8\times 10^{-5}}(2\times 10^{-4})^2$$

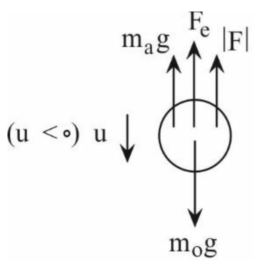
$$u_{\text{حد}}=4/8\ \frac{m}{s}$$

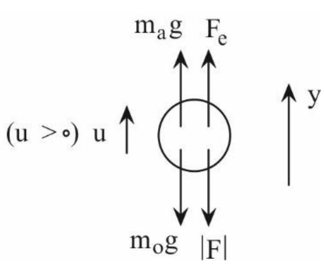
برای ویروس کرونا به شعاع $r=0/06\ \mu\text{m}$

$$u_{\text{حد}}=4/4\ \frac{\mu m}{s}$$

ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله در حالت تعلیق که $u=0$ است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را $-|q|$ می‌گیریم.

نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:





محاسبات و نکته‌های مهم

در هر دو حالت:

$$|q|\frac{v}{d}-\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\rho_{\circ} g+\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\rho_a g-۶\pi\eta r u_{حد}=۰$$

$$u_{حد}=\frac{|q|}{۶\pi\eta r}\frac{v}{d}-\frac{۲}{۹}\frac{(\rho_{\circ}-\rho_a)}{\eta}r^{۲}$$

از آنجا که $\rho_o >> \rho_a$ است از ρ_a در مقابل ρ_o چشم‌پوشی می‌کنیم. با توجه به نمودار:

به ازای $V=۰$ داریم $u_{حد}=-u_{\circ}$. در نتیجه

$$r=\sqrt{\frac{۴}{۲}\frac{\eta u_{\circ}}{\rho_{\circ} g}}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می‌آوریم:

$$|q|=\frac{۱۸\,\pi d}{V_{\circ}}\sqrt{\frac{\eta^{۳}u_{\circ}^{۳}}{۲\rho_{\circ} g}}$$

ث) با توجه به نمودار $u_{\circ}=۵۰\ \mu m/s$ و $V_{\circ}=۱۹۵v$، در نتیجه:

$$r=\sqrt{\frac{۹}{۲}\frac{\eta u_{\circ}}{\rho_{\circ} y}}=۳\sqrt{\frac{(۱/۸\times۱۰^{-۵})(۵\times۱۰^{-۵})}{(۲)(۸۸۰)(۹/۸)}}=\frac{(۳)(۳\times۱۰^{-۵})}{۴\sqrt{(۱۱۰)(۹/۸)}}\approx\frac{۹\times۱۰^{-۵}}{(۴)(۳۳)}=\frac{۳۰}{۴۴}\mu m$$

$$\Rightarrow r\approx ۰/۶۸\ \mu m$$

$$|q|=\frac{۶\pi\eta u_{\circ} d}{V_{\circ}}r=\frac{(۶)(۳/۱۴)(۱/۸\times۱۰^{-۵})(۵\times۱۰^{-۵})(۸\times۱۰^{-۳})(۳۰\times۱۰^{-۶})}{(۱۹۵)\times(۴۴)}$$

$$=\frac{(۶)(۳/۱۴)(۹)(۲۰)}{۶۵\times۱۱}\times۱۰^{-۱۹}=(\frac{۵۴}{۱۱})(\frac{۶/۲۸}{۶/۵})\times۱۰^{-۱۹}\approx(۵)\ (۹/۶)\times۱۰^{-۱۹}a=۴/۸\times۱۰^{-۱۹}a$$

$$|q|=۴/۸\times۱۰^{-۱۹}\ a=۳e$$

محاسبات و نکته‌های مهم

- آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی
- اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور
- مشاوره و کلاس‌های آنلاین
- آزمون‌های آنلاین المپیاد
- معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین

برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد آیریسک" را جستجو کنید.