

دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی و پنجمین المپیاد فیزیک

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۱	۷	دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

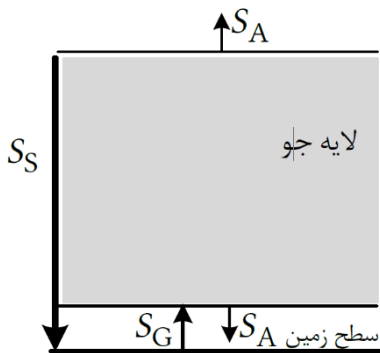
- ۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- ۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آن‌گاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می‌شوند.
- ۹- هر سؤال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.



۱) نیمی از جایزه نوبل سال ۲۰۲۱ به پژوهشگرانی اهدا شد که اقلیم زمین را مدل سازی کرده بودند. چنین مدل‌هایی متغیرهای بسیاری دارد و به طور معمول به سبب پیچیدگی‌شان، حل آن‌ها نیازمند محاسبات شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای است.

در این مسئله می‌خواهیم با مدلی بسیار ساده، پدیده گرمایش زمین بر اثر وجود لایه‌های جو را بررسی کنیم. برای این که بتوانیم مدل را تحلیل کنیم، نیاز به ساده‌سازی‌های فراوانی داریم. برای مثال سطح وسیعی از زمین را اقیانوس‌ها پوشانده‌اند که تأثیر به‌سزایی در اقلیم دارند، اما در این مسئله اثر اقیانوس‌ها را کنار می‌گذاریم. همچنین اثر شب و روز را در نظر نمی‌گیریم. هر چند نتیجه کمی این مدل ساده با واقعیت تفاوت دارد، اما نقطه شروع خوبی برای مدل‌های واقعی‌تر است.

مهم‌ترین منبع انرژی زمین، خورشید است. شدت نور خورشید در سطح زمین بر حسب بسامد متغیر است. کمیت شدت عبارت است از انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح می‌تابد. شدت متوسط نور خورشید در سطح زمین را با S_S نشان می‌دهیم. تابش خورشید به‌طور عمده در بسامدهایی صورت می‌گیرد که بدون جذب به‌طور کامل از تمامی لایه‌های جو عبور می‌کند، به زمین می‌سد و به‌طور کامل توسط زمین جذب می‌شود.

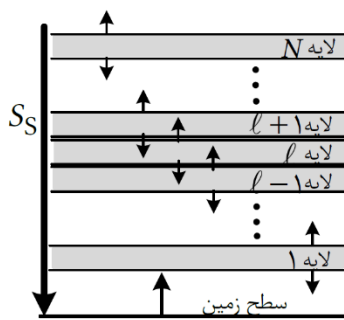


شکل ۱

شدت تابش گرمایی هر جسم در دمای T در محل جسم برابر با $S_e = kT^4$ است که در آن k ثابت است. در این مسئله ثابت k را برای زمین و لایه‌های جو یکسان می‌گیریم. اگر زمین جو نداشت، در دمای ثابت، یعنی در حالت تعادل گرمایی، شدت متوسط دریافتی توسط زمین از سوی خورشید، با شدت تابشی زمین برابر بود. در این حالت دمای زمین را با T_B نشان می‌دهیم و داریم $S_S = kT_B^4$. در هر جای مسئله که به شدت نور خورشید در سطح زمین احتیاج داشتید از این رابطه استفاده کنید.

آ) مطابق شکل ۱ جو زمین را تک لایه‌ای فرض کنید. در این وضعیت دمای زمین را با T_G و دمای لایه جو را با T_A نشان می‌دهیم. این لایه با شدت یکسان $S_A = kT_A^4$ هم به سمت زمین و هم به سمت فضا تابش دارد. همچنین فرض کنید تمام تابش لایه که به سمت زمین است توسط زمین جذب می‌شود و تمام تابش زمین نیز توسط لایه جو جذب می‌شود. با فرض تعادل گرمایی و ثابت بودن دمای زمین و لایه، T_G و T_A را بر حسب T_B به دست آورید.





شکل ۲

حال فرض کنید که مطابق شکل ۲ جو زمین از N لایه مجزا تشکیل شده باشد. مانند قبل تمام نور خورشید بدون جذب شدن از همه لایه‌ها عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط آن جذب می‌شود. این مجموعه در حال تعادل گرمایی است و دمای تمام اجزای آن ثابت است. دمای زمین را با T_E و دمای لایه ℓ ام را با T_ℓ نشان می‌دهیم. تابش گرمایی زمین به طور کامل توسط لایه اول جذب می‌شود. تابش لایه اول به سمت زمین به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود. لایه نوعی ℓ ام با شدت یکسان kT_ℓ^4 به لایه‌های $\ell-1$ و $\ell+1$ تابش می‌کند که به طور کامل توسط آن‌ها جذب می‌شود. لایه N ام نیز مشابه سایر لایه‌ها هم به سمت فضا و هم به سمت لایه $N-1$ تابش می‌کند.

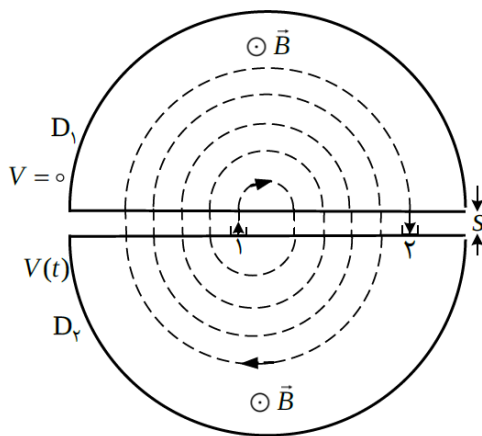
(ب) معادله‌های تعادل گرمایی را برای زمین، لایه ℓ ام ($1 \leq \ell \leq N$) و لایه N ام بنویسید.

(پ) T_N را بر حسب T_B به دست آورید.

(ت) T_ℓ را بر حسب T_B ، N و ℓ به دست آورید.

(ث) T_E را بر حسب T_B و N به دست آورید.

(۲) یک بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. صفحه دایره عمود بر امتداد B است. با به کار بردن قانون دوم نیوتون دوره چرخش این حرکت دایره‌ای را بر حسب m ، q و B به دست آورید.



شکل ۱

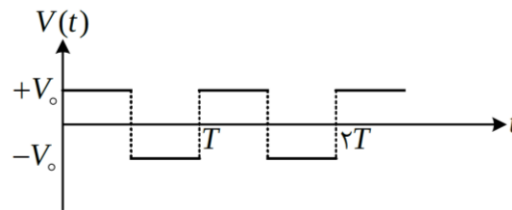
حال می‌خواهیم فرایند شتاب دادن ذرات باردار را دستگاهی موسوم به سیکلوترون را در چارچوب فیزیک نیوتونی بررسی کنیم. شتاب‌دهنده سیکلوترون دستگاهی مطابق شکل ۱ است که دارای دو رسانای نیم‌استوانه‌ای توخالی با مقطعی به شکل حرف انگلیسی D است. این دو رسانا را D_1 و D_2 می‌نامیم. فاصله قسمت تخت D_1 و D_2 از یکدیگر برابر است. قسمت تخت هر دو آن‌ها به صورت توری است به طوری که یک ذره باردار می‌تواند از آن عبور کند. رسانای D_1 همواره دارای پتانسیل الکتریکی صفر است و رسانای D_2 به پتانسیل الکتریکی $V(t)$ مطابق نمودار شکل ۲ متصل است.

محاسبات و نکته‌های مهم





این پتانسیل الکتریکی با دوره تناوب T به صورت زیر است.



شکل ۲

$$V(t) = \begin{cases} +V_0, & nT < t < nT + \frac{T}{2} \\ -V_0, & nT + \frac{T}{2} < t < nT + T \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

به این ترتیب در شکاف بین D_1 و D_2 ، یعنی در فاصله S ، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که به طور متناوب جهت آن معکوس می‌شود، اما داخل D ها میدان الکتریکی صفر است. همچنین مطابق شکل ۱ میدان مغناطیسی برون‌سوی B عمود بر سطح مقطع D ها وجود دارد. در این شتاب‌دهنده ابتدا ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی مثبت q از نقطه ۱ روی D_2 در لحظه $t = 0$ از حالت سکون به دلیل پتانسیل الکتریکی $+V_0$ شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_1 برسد. این ذره داخل D_1 می‌رود و بر اثر میدان مغناطیسی داخل آن می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_1 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 برابر $-V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_1 مجدداً شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_2 برسد و داخل آن برود. در داخل D_2 ذره بر اثر میدان مغناطیسی می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_2 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 دوباره $+V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_2 مجدداً به سمت D_1 شتاب می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود (شکل ۱). با توجه به محدود بودن دفعات چرخش و اندازه شکاف S ، ذره همواره در شکاف بین D ها حرکت تندشونده دارد. اثر میدان مغناطیسی در شکاف بین دو رسانا را ناچیز بپذیرید به طوری که مسیر حرکت ذره در شکاف بین D ها همواره عمود بر سطح تخت D ها است. توجه کنید که تغییر علامت پتانسیل تقریباً به طور لحظه‌ای صورت می‌گیرد و قبل از این لحظه سرعت ذره یکسان است. فرض کنید دوره تناوب T در شکل ۲، برابر با دوره چرخش ذره باردار بخش آ است.

(ب) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، سرعت ذره را بر حسب k, m, q و V_0 به دست آورید.

(پ) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، شعاع چرخش ذره در میدان مغناطیسی را بر حسب k, m, q, B و V_0 به دست آورید.

(ت) فرض کنید بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، مطابق شکل ۱، ذره به نقطه ۲ روی D_2 برسد. زمان رسیدن ذره به نقطه ۲، t ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

(ث) کل مسافتی که ذره در قسمت T طی می‌کند، l ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

(ج) حداکثر مقدار S چقدر باشد تا در تمام k بار عبور ذره از شکاف، حرکت تندشونده باشد؟

محاسبات و نکته‌های مهم



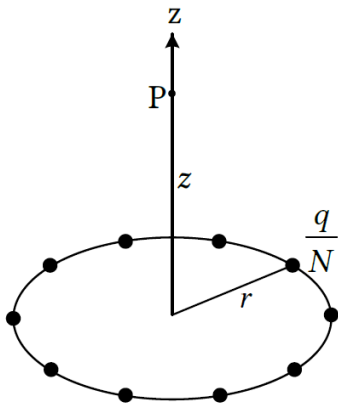


ج) با فرض $\frac{m}{q} = 1.0^{-8} \text{ kg/C}$ ، $V_0 = 50.0 \text{ kV}$ ، $S = 2.00 \text{ mm}$ ، $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ و $B = 1.04 \text{ T}$ اگر بخواهیم انرژی جنبشی ذره

وقتی به نقطه ۲ می‌رسد 25.0 MeV باشد، مقادیر k ، t و l را به دست آورید. در اینجا، برای کهای بزرگ از رابطه تقریبی

$$\sum_{i=1}^k \sqrt{i} \cong \frac{2}{3} \sqrt{k^3} + \frac{1}{2} \sqrt{k}$$

می‌توانید استفاده کنید.



شکل ۱

۳) آ) بار الکتریکی q را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را مطابق شکل ۱ بر روی رئوس یک N ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است قرار داده‌ایم. محور تقارن دستگاه بر صفحه دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد. مقدار و جهت میدان الکتریکی در نقطه P واقع بر محور تقارن دستگاه و به فاصله z از مرکز دایره را به دست آورید. برای سهولت می‌توانید N را زوج فرض کنید.

ب) حلقه‌ای به شعاع r در نظر بگیرید که بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. به کمک بخش آ میدان الکتریکی این حلقه را در نقطه‌ای به فاصله z از مرکز حلقه بر روی محور آن به دست آورید.

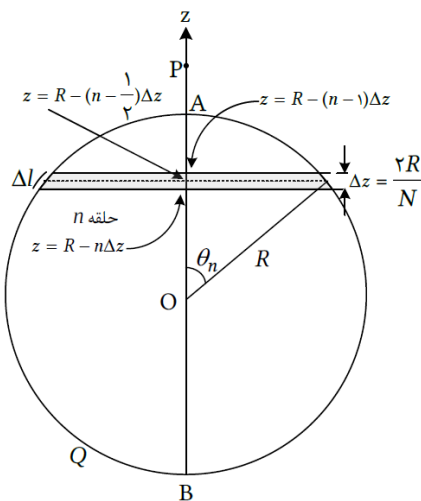
پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصله d از یک بار نقطه‌ای q نسبت به مبدأ دوردست برابر $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$ است. پتانسیل الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع جبری پتانسیل الکتریکی آن‌ها است.

پ) پتانسیل الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r و بار الکتریکی q در نقطه‌ای بر روی محور آن و به فاصله z از مرکز حلقه را به دست آورید.

مطابق شکل ۲، یک پوسته کروی به شعاع R در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. نقطه P واقع بر محور z و به فاصله d ($d < R$) از مرکز کره است. مبدأ مختصات را در مرکز کره بگیرید. بازه بین نقاط A به مختصه $z = R$ به مختصه $z = -R$ را به N قسمت مساوی تقسیم کنید.



محاسبات و نکته‌های مهم



شکل ۲

از هر نقطه تقسیم، صفحه‌ای فرضی عمود بر محور z در نظر بگیرید. فاصله هر دو صفحه متوالی از هم $\Delta z = 2R/N$ است. هر صفحه، کره را در یک دایره قطع می‌کند. در میان هر دو صفحه فرضی متوالی باریکه‌ای از سطح کره قرار می‌گیرد. اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد هر کدام از باریکه‌های یاد شده مشابه حلقه بخش b خواهد بود. حلقه n ام را بین صفحات $z = R - n\Delta z$ و $z = R - (n-1)\Delta z$ در نظر بگیرید. مرکز حلقه n ام روی محور z در نقطه $z = R - (n - \frac{1}{2})\Delta z$ است. زاویه θ_n مربوط به حلقه n ام در شکل ۲ مشخص شده است.

(ت) کمیت $\cos \theta_n$ را بر حسب n و N دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

(ث) مساحت حلقه n ام و بار الکتریکی روی آن را به دست آورید.

راهنمایی: سطح هر حلقه را می‌توان تقریباً مشابه سطح نواری مستطیل شکل به عرض Δl در نظر گرفت.

(ج) از هر هم نهی میدان الکتریکی حلقه‌ها، میدان الکتریکی کره را در نقطه P به صورت یک جمع روی شمارنده n بر حسب Q, R, d و θ_n ها به دست آورید.

(چ) به روش مشابه، پتانسیل الکتریکی پوسته کروی شکل ۲ در نقطه P را به صورت یک جمع روی شمارنده n بر حسب Q, R, d و θ_n ها به دست آورید.

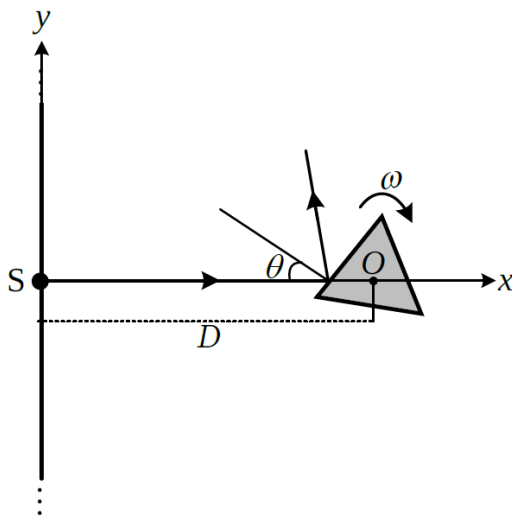
(ح) فرض کنید پاسخ بخش‌های ج و چ برای میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر باشد،

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2 N} \sum_{n=1}^N f(x_n, \alpha) \quad , \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d N} \sum_{n=1}^N g(x_n, \alpha)$$

که در آن $x_n = \cos \theta_n$ و $\alpha = R/d$ فرض شده‌اند. توابع $f(x, \alpha)$ و $g(x, \alpha)$ را بنویسید. برای $\alpha = \frac{1}{3}$ شکل تقریبی این دو تابع را رسم کنید. برای این کار توجه کنید که مشتق اول و دوم هر دو تابع مثبت هستند. بنابراین کافی است مقدار توابع یاد شده را در ابتدا و انتهای بازه مجاز و در $x = 0$ به دست آورید.



محاسبات و نکته‌های مهم



۴) باریکه‌ای از نور مطابق شکل از چشمه S در راستای محور x به سمت راست منتشر می‌شود. امتداد باریکه از نقطه O مرکز یک N-ضلعی منتظم می‌گذرد. در شکل مقابل، حالت $N=3$ نشان داده شده است. این N-ضلعی منتظم مقطعی از یک منشور با صفحه شکل است که وجوه خارجی آن آینه است. آینه‌ها بر صفحه شکل عمودند. منشور حول محوری که از نقطه O گذشته و بر صفحه شکل عمود است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به طور ساعتگرد می‌چرخد. باریکه نور پس از بازتاب از آینه‌ای که در لحظه معینی در مسیر آن است، به پرده‌ای نامتناهی که در پشت چشمه قرار دارد برخورد می‌کند و باعث ایجاد نقطه‌ای نورانی می‌شود. این اتفاق در

صورتی رخ می‌دهد که زاویه نور بازتابیده با محور x مناسب باشد. در شکل، محور y مقطع پرده با صفحه شکل است. زاویه تابش نور به آینه در یک لحظه نامشخص را θ بگیرید. فاصله SO را برابر D بگیرید که بسیار بزرگتر از ابعاد N-ضلعی است. فاصله چشمه از پرده را ناچیز بگیرید. در بخش‌های آ و ب این مسئله فرض کنید انتشار نور به طور آنی صورت می‌گیرد، یعنی سرعت انتشار آن نامتناهی است. طولی از محور y که توسط نقطه روشن جاروب می‌شود را ΔL بگیرید و فرض کنید $f = \frac{\Delta L}{D}$. همچنین g را کسری از یک بازه زمانی طولانی بگیرید که طی آن، یک نقطه روشن روی پرده وجود دارد.

آ) کسرهای f و g را برای موارد ذکر شده در جدول زیر به دست آورید. در پاسخ‌نامه خود جدولی مشابه این جدول بکشید و جواب‌های خود را در خانه‌های خالی آن پر کنید.

N	۳	۴	$N > 4$	۶
f				
g				

در ادامه مسئله فرض کنید $N=3$ است یعنی مقطع منشور مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ب) سرعت نقطه روشن روی پرده را بر حسب θ به دست آورید. به ازای چه مقادیر از θ اندازه سرعت نقطه روشن از مقدار معین V بیشتر است؟



محاسبات و نکته‌های مهم



حال فرض کنید نور از ذراتی موسوم به فوتون تشکیل شده که با سرعت ثابت c منتشر می‌شوند. فوتون‌ها در برخورد با آینه از قانون بازتاب عمومی (برابری زوایای تابش و بازتاب) تبعیت می‌کنند. فرض کنید در لحظه $t_m = 0$ یکی از آینه‌ها بر خط SO عمود است و در لحظه دلخواه t_m به اندازه زاویه $\theta = \omega t_m$ چرخیده است. فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد کرده در لحظه t به پرده می‌رسد.

پ) t را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

ت) فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد می‌کند در نقطه y به پرده می‌رسد. y را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

ث) سرعت نقطه نورانی روی پرده، $v = \frac{dy}{dt}$ ، که به معنی مشتق y نسبت به t است، را با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

یادآوری قاعده مشتق زنجیره‌ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد، مشتق f نسبت به s از رابطه

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{du} \frac{du}{ds}$$

به دست می‌آید. همچنین توجه داشته باشید که $\left(\frac{ds}{du}\right)^{-1} = \frac{du}{ds}$.

ج) نمودار کمیت $z = \frac{2\omega D}{v}$ را بر حسب $p = \sin 2\theta$ رسم کنید. سپس نمودار $\frac{v}{c}$ را بر حسب p رسم کنید.

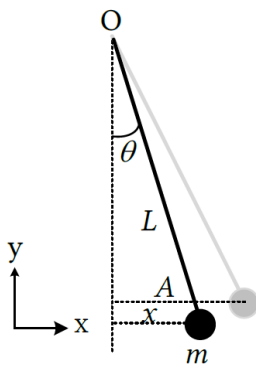
در محاسبات و رسم نمودارها، نسبت $\frac{\omega D}{c}$ را α بگیرید و فرض کنید $1 < \alpha < \frac{1}{p}$. بر روی نمودارها هر مشخصه‌ای از قبیل نقاط تقاطع با محورها، محل کمینه‌ها و بیشینه‌ها و مقدار آن‌ها، محل مجانب‌ها، بازه‌های معتبر حرکت و مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه‌های مذکور را مشخص کنید.

چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب p معلوم کنید در چه بازه‌ای از θ اندازه سرعت نقطه نورانی روی پرده از c بیشتر است؟

ح) اگر بازه زمانی بسیار کوتاه بین ارسال دو فوتون متوالی از چشمه T فرض شود، بازه زمانی بین رسیدن دو فوتون متوالی به پرده، T ، را بر حسب T_0 و θ به دست آورید. معلوم کنید T همواره از T_0 بزرگ‌تر است یا همواره از آن کوچک‌تر است و یا گاهی از آن بزرگ‌تر و گاهی کوچک‌تر است؟

محاسبات و نکته‌های مهم





شکل ۱

۵) گوی فلزی کوچکی به جرم m در انتهای یک میله فلزی نازک بسیار سبک به طول L قرار دارد. میله مطابق شکل ۱ از نقطه O آویزان است و می تواند حول امتداد قائم نوسان کند. گوی فلزی را از حالت تعادل به اندازه فاصله افقی A منحرف می کنیم و در زمان $t=0$ آن را رها می کنیم. در تمام این مسئله زاویه انحراف آونگ کوچک است به طوری که انحراف افقی گوی، x ، با زاویه انحراف θ رابطه تقریبی $x \approx L\theta$ دارد.

(آ) انرژی پتانسیل گرانشی آونگ، $U(x)$ ، را نسبت به پایین ترین نقطه حرکت آن بر حسب x به دست آورید. با

توجه به این که x از L بسیار کوچک تر است، با استفاده از رابطه $\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$ که برای $|\epsilon|$ خیلی

کوچک تر از یک، تقریب خوبی است، تابع انرژی پتانسیل گرانشی را به صورت $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ به دست آورید و ضریب k را بر حسب داده های مسئله بنویسید.

(ب) انرژی کل این دستگاه، $E = K + U$ ، ثابت است و با زمان تغییر نمی کند. مشتق این کمیت نسبت به زمان را حساب کنید و برابر صفر قرار

دهید. از این طریق برای حرکت آونگ نسبت $\frac{a}{x}$ را بر حسب ثابت های مسئله به دست آورید که a شتاب افقی گوی و x جابجایی آن از حالت

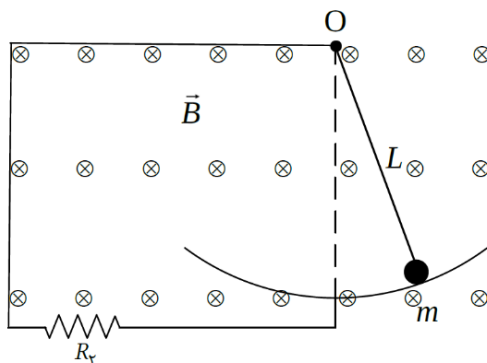
تعادل است. سرعت لحظه ای افقی گوی را v بگیرید. لازم به ذکر است که در تمام این مسئله مؤلفه قائم سرعت گوی قابل چشم پوشی است.

راهنمایی: برای محاسبه مشتق کمیت های x^2 و v^2 نسبت به زمان از قاعده مشتق زنجیره ای استفاده کنید.

(پ) برای حرکت نوسانی با معادله $x = A \cos(\omega t + \beta)$ نسبت $\frac{a}{x}$ را به دست آورید. از مقایسه این نتیجه با نتیجه بخش ب بسامد زاویه ای ω را

برای حرکت آونگ حساب کنید. همچنین با توجه به شرایط اولیه مسئله، β (فاز اولیه) را

نیز تعیین کنید.



شکل ۲

حال دستگاه شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این دستگاه، آونگ شکل ۱ در یک مدار

الکتریکی قرار داده شده است. گوی فلزی مماس بر سطح یک رسانای بدون مقاومت و

بدون اصطکاک با مقطع دایره ای حرکت می کند و همواره اتصال مدار برقرار است. مقاومت

الکتریکی میله و گوی را R_1 بگیرید و از مقاومت الکتریکی سیم ها چشم پوشید.

محاسبات و نکته های مهم





همچنین مدار دارای یک مصرف‌کننده با مقاومت R_2 است. میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} عمود بر سطح مدار و به سمت داخل شکل برقرار است. لازم به ذکر است که در این حالت، گوی فلزی حرکت هماهنگ ساده ندارد.

ت) نیروی محرکه الکتریکی القاء شده در مدار را بر حسب سرعت افقی گوی، v ، و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

راهنمایی: برای زاویه‌های کوچک می‌توان کمان مقابل به زاویه را با وتر متناظر با آن یکی گرفت.

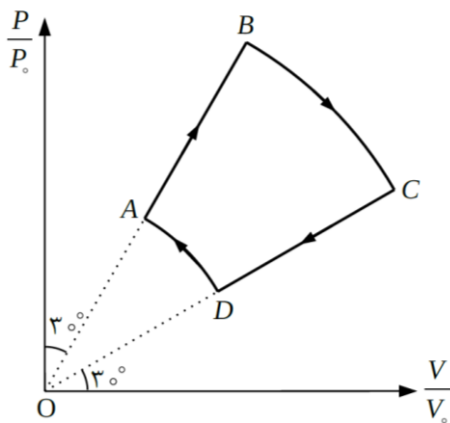
ث) انرژی این دستگاه به دلیل اتلاف در مقاومت‌ها ثابت نیست و با زمان کاهش می‌یابد. می‌دانیم اندازه انرژی تلف شده در واحد زمان در مقاومت الکتریکی R برابر Ri^2 است که i جریان لحظه‌ای گذرنده از مقاومت است. حال مشتق انرژی دستگاه نسبت به زمان را با منفی اندازه آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌ها برابر بگیرید، و به معادله‌ای به صورت $ma + bv + kx = 0$ برسید که در آن a شتاب، v سرعت و x جابجایی افقی گوی است. ضرایب b و k را معین کنید.

ج) جواب معادله‌ای که در بخش ث به دست آمد به صورت $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega't + \beta)$ است. در این معادله از تابع نمایی $e^{-\gamma t}$ استفاده شده است که در آن e عدد نپر نام دارد و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار برابر $۲,۷۲$ است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d(e^{-\gamma t})}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}$ است. این حل را در معادله به دست آمده در بخش ث قرار دهید و کمیت‌های γ و ω' را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید.



محاسبات و نکته‌های مهم





۶) n مول گاز کامل تک اتمی فرآیند ترمودینامیکی چرخه شکل مقابل در صفحه نمودار P/P_0 بر حسب V/V_0 را طی می‌کند که P_0 فشاری معین و V_0 حجمی معین است. فرآیندهای $B \rightarrow C$ و $D \rightarrow A$ به ترتیب کمانی از دایره‌های به شعاع ۱ و ۲ و به مرکز مبدأ مختصات در این صفحه‌اند. مطابق شکل امتداد OC با محور افقی و امتداد OB با محور عمودی زاویه 30° می‌سازند. کمیت‌های خواسته شده را بر حسب n, R, V_0, P_0 و $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$ بنویسید و پاسخ‌های خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید. در ارائه

جواب‌های عددی، محاسبه جذر اعداد ضروری نیست. لازم به ذکر است انرژی داخلی n مول گاز کامل تک اتمی در دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که R ثابت جهانی گازها است.

آ) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T) ، هر یک از نقاط A, B, C و D را به دست آورید.

ب) کار محیط روی گاز در هر یک از فرآیندهای $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A$ را محاسبه و همراه با علامت آن بنویسید.

پ) کار محیط روی گاز در کل این چرخه چقدر است؟

ت) گرمای خالص داده شده به گاز (گرمای داده شده به گاز منهای گرمای گرفته شده از گاز) در هر یک از فرآیندهای $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه کنید و همراه با علامت آن بنویسید.

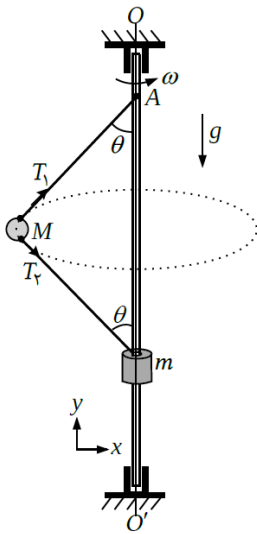
ث) نقطه‌ای روی فرآیند $B \rightarrow C$ و نقطه مشابهی روی فرآیند $D \rightarrow A$ وجود دارد که گرمای مبادله شده با محیط قبل و بعد آن تغییر علامت می‌دهد. مختصات ترمودینامیکی این نقاط را به دست آورید.

راهنمایی: به عنوان مثال در فرآیند $B \rightarrow C$ اگر گرمای داده شده به گاز از نقطه B تا نقطه دلخواهی روی کمان BC را $Q(V)$ بگیریم، نقطه مورد نظر جایی است که مشتق Q نسبت به V تغییر علامت دهد.

ج) گرمای داده شده به گاز از طرف محیط در این چرخه و گرمای گرفته شده از گاز در این چرخه را به دست آورید. در ارائه جواب می‌توانید از توابع معکوس مثلثاتی استفاده کنید. به عنوان مثال اگر $\tan \theta = c$ باشد می‌توان نوشت $\theta = \tan^{-1} c$ که θ بر حسب رادیان است.

محاسبات و نکته‌های مهم





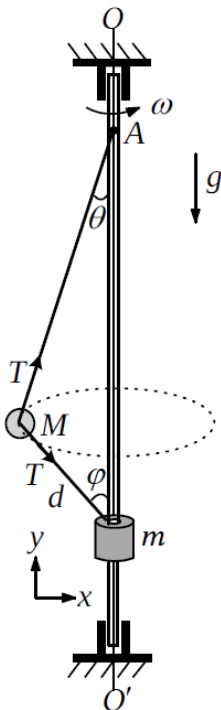
شکل ۱

(۷) مطابق شکل ۱ به مهره‌ای با جرم M دو ریسمان (نخ) یکسان هر یک به طول $\frac{1}{4}l$ متصل شده است. انتهای یکی از ریسمان‌ها به نقطه ثابت A از میله‌ای قائم و انتهای ریسمان دیگر به جرم m که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد، وصل شده‌اند. میله قائم به موتوری وصل است که آن را حول راستای OO' می‌چرخاند. از جرم ریسمان‌ها و شعاع میله صرف نظر کنید. شتاب گرانش g است.

(آ) در وضعیتی که مهره و ریسمان‌ها در صفحه شکل هستند قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه θ ، نیروهای کشش ریسمان‌ها (T_1 و T_2)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

(ب) یک جواب بدیهی برای این دستگاه $\theta = 0$ است. اگر ω از مقدار کمینه ω_m بزرگ‌تر باشد جواب دیگری نیز برای زاویه θ به دست می‌آید. ω_m را بر حسب M ، m ، l و g تعیین کنید.

(پ) به ازای $\omega = 2\omega_m$ کشش ریسمان‌ها، $\cos \theta$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم M را به دست آورید.



شکل ۲

اکنون مطابق شکل ۲، ریسمانی به طول l در نظر بگیرید که یک سر آن به نقطه ثابت A روی میله قائم بسته شده و انتهای آن به وزنه‌ای به جرم m متصل است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد. ریسمان از داخل مهره‌ای به جرم M عبور داده شده و مهره نیز می‌تواند بدون اصطکاک در طول ریسمان حرکت کند. در این حالت نیز میله قائم به موتوری وصل است که میله را حول راستای OO' می‌چرخاند. موتور با چنان سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد که در نتیجه آن مهره بر روی یک مسیر دایره‌ای حول راستای قائم می‌چرخد. مطابق شکل ۲ زاویه ریسمان‌ها با راستای قائم θ و φ و طول ریسمان واقع بین دو جرم d است. از جرم ریسمان و شعاع میله صرف نظر کنید. حرکت بدون اصطکاک مهره در طول ریسمان باعث می‌شود کشش در طول ریسمان یکسان باشد.

(ت) قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه‌های θ و φ ، نیروی کشش ریسمان (T)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

در قسمت‌های بعدی مسئله فرض کنید $M = 2m$.

محاسبات و نکته‌های مهم





ث) کمیت $\cos^2 \theta$ را برحسب متغیر $u = \frac{d}{l}$ به دست آورید. (فرض کنید جواب در محدوده قابل قبول است).

ج) کمیت ω^2 را برحسب u ، l و g به دست آورید.

چ) به ازای $u = \frac{1}{4}$ ، سرعت زاویه‌ای، کشش ریسمان، $\cos \theta$ ، $\cos \varphi$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم $2m$ را به دست آورید.

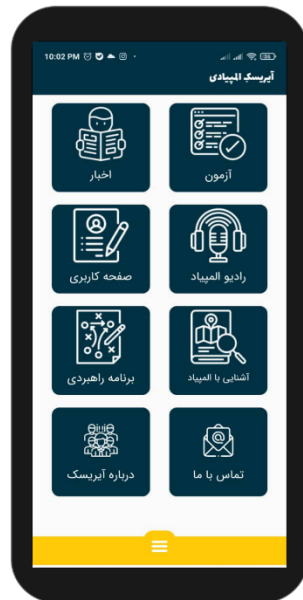
ح) به ازای مقدار خاصی از u کمیت $\frac{l\omega^2}{g}$ کمینه می‌شود. این مقدار خاص u ریشه حقیقی و مجاز یک معادله درجه چهار به صورت

$$u^4 + c_3 u^3 + c_2 u^2 + c_1 u + c_0 = 0$$

است. مقدار عددی ضرایب c_0 ، c_1 ، c_2 و c_3 را به دست آورید. (حل این معادله لازم نیست).



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس‌های آنلاین

○ آزمون‌های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد آیریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad