

دفترچه سؤالات مرحله دوم

بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۶	۲۰	۱۸۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- ۱- کد دفترچه شما یک است. این کد را با کدی که روی پاسخ‌نامه نوشته شده است تطبیق دهید. در صورت وجود مغایرت، در سرعت وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگه پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۴- کلیه جواب‌ها باید در پاسخ‌نامه وارد شود. بدیهی است موارد مندرج در دفترچه سؤالات تصحیح نشده و به آن‌ها هیچ نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.
- ۵- نام و نام‌خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سؤالات و پاسخ‌نامه بنویسید.
- ۶- برگه پاسخ‌نامه شما را دستگاہ تصحیح می‌کند. پس از آن را تا نکنید و تمیز نگه‌دارید و به‌علاوه پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۷- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد.
- ۸- ترتیب گزینه‌ها به صورت تصادفی است. سؤالات ۱۲ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- ۹- همراه داشتن لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب می‌شود.
- ۱۰- شرکت‌کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می‌شوند.
- ۱۱- دفترچه سؤالات باید همراه با پاسخ‌نامه به مسئولین جلسه تحویل شود.

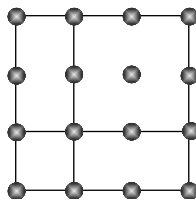


روز اول

۱- دستگاهی داریم که یک عدد دودویی ۹ رقمی روی نمایشگر آن دیده می‌شود. در ابتدا این عدد برابر ۱۰۱۱۰۱۰۰۰ یا همان ۴۵ است. این دستگاه دکمه‌ای دارد که اگر آن را فشار دهیم، عدد روی نمایشگر یک واحد زیاد می‌شود. آن قدر دکمه را می‌زنیم تا به نمایش دودویی عدد ۴۲۳ برسیم. هر کدام از این ۹ رقم در طول مراحل چندین بار تغییر کرده‌اند. مجموع تعداد این تغییرها چند تاست؟

- (۱) ۷۴۸ (۲) ۷۵۳ (۳) ۷۴۴ (۴) ۷۵۱ (۵) ۷۵۴

۲- در گراف زیر حداقل چند یال باید حذف کنیم تا طول هیچ دوری بیش از چهار نباشد؟



- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۶ (۵) ۸

۳- یک جدول 4×4 داریم و می‌خواهیم هر یک از خانه‌های آن را با سیاه یا سفید رنگ کنیم. یک خانه را امن گوییم، اگر در ستون اول، ستون آخر و سطر پایین نباشد و هم‌چنین هر سه خانه مجاور چپ، راست و پایین آن سیاه باشند. به چند طریق می‌توان خانه‌های جدول را رنگ‌آمیزی کرد، طوری که خانه امن نداشته باشیم؟

- (۱) ۳۱۶۸۴ (۲) ۱۷۸ (۳) ۱۹۳۲۱ (۴) ۲۲۵۰۰ (۵) ۲۱۲

۴- در مغازه گل‌فروشی دو گل قرمز، دو گل بنفش و دو گل زرد در یک ظرف در بسته قرار دارد. مرتضی طبق روال زیر، یک گل برای خود می‌خرد: ابتدا رنگ دلخواهش را قرمز انتخاب می‌کند و تصمیم می‌گیرد یک گل قرمز بخرد. سپس یک گل به تصادف از ظرف برمی‌دارد. اگر گل برداشته شده به رنگ دلخواهش بود، آن را می‌خرد و کار تمام می‌شود؛ در غیر این صورت رنگ دلخواهش را به رنگ آن گل تغییر می‌دهد و گل را به ظرف برمی‌گرداند. دوباره یک گل به تصادف از ظرف برمی‌دارد و همین روند تکرار می‌شود تا بالأخره یک گل خریده شود. مرتضی به چه احتمالی گل قرمز خواهد خرید؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۵) $\frac{3}{5}$



محاسبات و نکته‌های مهم



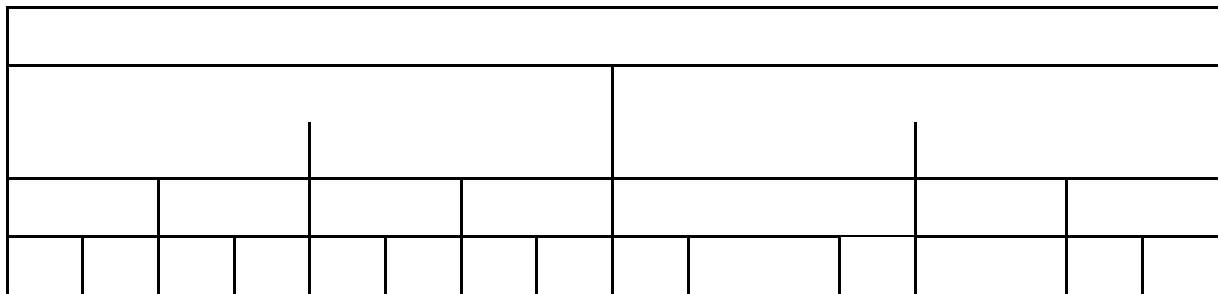
۵- ۱۰۰ زیر جدول 100×100 متمایز در یک جدول 200×200 داریم. حداکثر چند خانه از جدول در تمام این زیر جدول ها هستند؟

(۱) ۶۴۰۰ (۲) ۹۰۰ (۳) ۸۱۰۰ (۴) ۱۰۰ (۵) ۸۲۸۱

۶- ۱۰۰ زیر جدول 100×100 متمایز در یک جدول 200×200 داریم. حداکثر چند خانه از جدول هستند که در دقیقاً ۹۹ تا از این زیر جدول ها آمده باشند؟

(۱) ۹۰۰ (۲) ۸۲۸۱ (۳) ۸۱۰۰ (۴) ۹۰۰۰ (۵) ۶۴۰۰

۷- دیوار زیر را در نظر بگیرید:



این دیوار از تعدادی آجر تشکیل شده است. به جز آجرهای سطر پایین، زیر هر کدام از آجرها دو آجر کوچکتر وجود دارد که آن‌ها را فرزندان آجر گفته شده می‌نامیم. در هر یک از شرایط زیر، گوییم آجر X به آجر Y راه دارد:

۱. Y فرزند X باشد.

۲. هر دو آجر در یک سطر بوده و مرز مشترک داشته باشند.

۳. هر دو آجر در یک سطر بوده و یکی در انتها و دیگری در ابتدای سطر باشد.

حال می‌خواهیم از آجر بالای دیوار شروع کنیم، هر مرحله به یک آجر که به آن راه داریم، برویم و کار را در یکی از آجرهای سطر پایین تمام کنیم. ممکن است در این مسیر، چند آجر از سطر پایین ببینیم و لزوماً به محض رسیدن به سطر پایین، کار را تمام نمی‌کنیم. هم‌چنین تنها دنباله آجرها در مسیر مهم است و نحوه رفتن آن‌ها به یک‌دیگر مهم نیست. برای مثال دو آجر سطر دوم (از بالا) را در نظر بگیرید. این دو هم به دلیل شرط (۲) و هم به دلیل شرط (۳) به هم راه دارند. حال اگر در مسیری، از یکی از آن‌ها به دیگری برویم، مهم نیست از شرط (۲) استفاده کرده‌ایم یا شرط (۳). هم‌چنین با توجه به شرایط گفته شده، امکان حرکت رو به بالا وجود ندارد. چند مسیر به شکل گفته شده وجود دارد، طوری که از هر آجر حداکثر یک بار بگذریم؟

(۱) 3255×2^4 (۲) 3255×2^5 (۳) 2^{17} (۴) 3255×2 (۵) 2^{14}

محاسبات و نکته‌های مهم





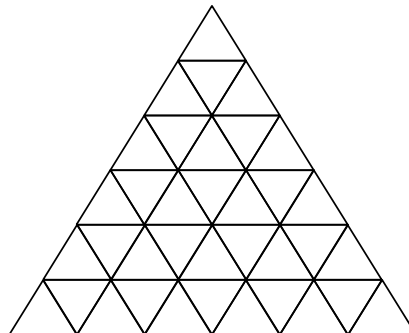
۸- یک گراف کامل ۱۱ رأسی با رأس‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ داریم. روی یال بین رأس‌های i و j مقدار باقی‌مانده $i + j$ در تقسیم بر ۱۱ را نوشته‌ایم. عدد یک مسیر را کم‌ترین عدد در میان یال‌های آن مسیر می‌نامیم. دو رأس دو رأس دلخواه در نظر بگیرید. بیشینه عدد مسیر را در میان مسیرهای بین این دو رأس، میزان دوستی این دو رأس می‌نامیم. می‌خواهیم یک زیر گراف فراگیر از گراف داده شده انتخاب کنیم، طوری که میزان دوستی هر دو رأس در زیر گراف برابر با میزان دوستی‌شان در گراف اصلی باشد. کمینه ممکن مجموع اعداد یال‌های این زیر گراف چیست؟

- (۱) ۲۷۰ (۲) ۵ (۳) ۹۵ (۴) ۱۰۱ (۵) ۲۷۵

۹- فرض کنید ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. مکمل این مثلث به شکل زیر ساخته می‌شود:

یک رأس مثلث را انتخاب می‌کنیم. برای مثال فرض کنید رأس A انتخاب شود. B و C را نسبت به A قرینه می‌کنیم تا نقاط B' و C' به دست آیند. مثلث $AB'C'$ را مکمل مثلث ABC می‌نامیم.

توجه کنید یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه دارای سه مکمل است. حال یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه در نظر بگیرید. هر ضلع آن را به n بخش برابر تقسیم کنید و با کشیدن خطوط موازی با اضلاع، درون مثلث را به n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم کنید. به مثلث حاصل، یک مثلث مشبک n تایی گفته می‌شود. برای مثال شکل زیر یک مثلث مشبک شش تایی است:



به هر کدام از n^2 مثلث کوچک، مثلثک می‌گوییم. گوییم مثلثک P با مثلثک Q ارتباط دارد، اگر بتوانیم از P شروع کرده، در هر مرحله به یک مثلثک مکمل برای مثلثک فعلی برویم و در انتها به Q برسیم. توجه کنید در حین این مسیر نباید از مثلث اصلی خارج شویم و تنها می‌توانیم از مثلثک‌ها استفاده کنیم.

یک مثلث مشبک 30 تایی در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعدادی مثلثک انتخاب کنیم، طوری که هر مثلثک دیگر با دست کم یکی از مثلثک‌های انتخاب شده ارتباط داشته باشد. کمینه تعداد مثلثک‌هایی که باید انتخاب کنیم، چیست؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷ (۵) ۶



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۰- در ابتدا یک باکتری و یک لانه داریم. در هر مرحله هر باکتری می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

- یک لانه بسازد.

- درون یک لانه خالی برود و تکثیر شود؛ یعنی به دو باکتری تبدیل شود.

توجه کنید در یک مرحله، در هر لانه حداکثر یک باکتری می‌تواند قرار بگیرد و تکثیر شود. پس از هفت مرحله، بیشینه ممکن تعداد باکتری‌ها چیست؟

۳۴ (۵)

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۲۶ (۲)

۲۹ (۱)

۱۱- سلطان n دست‌کش، n کلاه و n شال‌گردن دارد. هر کدام از دست‌کش‌ها، کلاه‌ها و شال‌گردن‌ها به یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز هستند. او می‌خواهد n دست لباس زمستانی بسازد (هر دست شامل یک دست‌کش، یک کلاه و یک شال‌گردن است). امتیاز هر دست لباس، به اندازه تعداد رنگ‌هایی است که در آن به کار رفته است. برای مثال یک دست لباس شامل یک دست‌کش آبی، یک کلاه قرمز و یک شال‌گردن آبی دو امتیاز دارد. هدف سلطان، بیشینه کردن مجموع امتیاز n دست لباس است.

ایلچ به سلطان برای ساختن n دست لباس، الگوریتم زیر را پیشنهاد داده است:

تا زمانی که می‌توانیم با دست‌کش‌ها، کلاه‌ها و شال‌گردن‌های موجود یک دست لباس ۳ امتیازی دلخواه می‌سازیم. سپس تا زمانی که می‌توانیم یک دست لباس ۲ امتیازی دلخواه می‌سازیم و در انتها دست‌های ۱ امتیازی تشکیل می‌دهیم.

از میان گزاره‌های زیر، کدام گزاره یا گزاره‌ها صحیح هستند؟

(آ) الگوریتم ایلچ همواره سلطان را به هدفش می‌رساند؛ یعنی بیشینه مجموع امتیاز ممکن را می‌سازد.

(ب) اگر در میان $3n$ عنصر موجود از هر رنگ n عنصر داشته باشیم، می‌توان n دست لباس با مجموع امتیاز $3n$ ساخت.

(ج) اگر در میان $3n$ عنصر موجود از هر رنگ n عنصر داشته باشیم، الگوریتم ایلچ بیشینه مجموع امتیاز ممکن را می‌سازد.

(د) اگر دست ۳ امتیازی قابل ساخت نباشد و همچنین دست‌کش‌ها از دقیقاً دو رنگ، کلاه‌ها از دقیقاً دو رنگ و شال‌گردن‌ها نیز از دقیقاً دو رنگ باشند، می‌توان نتیجه گرفت که $3n$ عنصر موجود دقیقاً از دو رنگ هستند.

(۵) تمام گزاره‌ها

(۴) فقط گزاره د

(۳) گزاره‌های ب و د

(۲) گزاره‌های ب، ج و د

(۱) هیچ کدام از گزاره‌ها



محاسبات و نکته‌های مهم





یک جدول $n \times n$ داریم. دو خانه از این جدول را مجاور گوئیم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. ابتدا در هر یک از خانه‌های سطر پایین جدول یک مهره قرار گرفته است. در هر مرحله هر مهره می‌تواند ساکن بماند و یا به یک خانه مجاور برود. توجه کنید قرار گرفتن بیش از یک مهره در یک خانه مشکلی ندارد. در پایان باید در هر یک از خانه‌های سطر بالای جدول یک مهره قرار گرفته باشد. می‌خواهیم کمینه تعداد مراحل لازم برای این کار را بیابیم، طوری که در حین مراحل، هر دو مهره در دست کم یک مرحله در یک خانه بوده باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

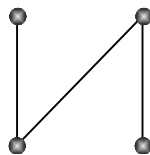
۱۲- پاسخ مسئله به ازای $n=11$ چیست؟

۲۱ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۳۳ (۵)

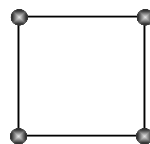
۱۳- پاسخ مسئله به ازای $n=10$ چیست؟

۲۷ (۱) ۱۱ (۲) ۹۹ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹ (۵)

یک گراف ساده را سلطانی گوئیم، اگر اختلاف درجه هیچ دو رأس آن برابر یک نباشد. برای مثال گراف زیر سلطانی نیست، زیرا هم رأس با درجه یک و هم رأس با درجه دو دارد:



توجه کنید در یک گراف سلطانی، وجود دو رأس با درجه برابر مشکلی ندارد. برای مثال، گراف زیر سلطانی است:



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴- یک گراف ساده ۱۱ رأسی سلطانی داریم که کامل نیست. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۴۹ (۱) ۵۳ (۲) ۵۲ (۳) ۴۵ (۴) ۵۴ (۵)

محاسبات و نکته‌های مهم





۱۵- یک گراف ساده ۱۱ رأسی سلطانی داریم. در این گراف هیچ سه رأسی وجود ندارد که دو به دو به هم وصل باشند. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۳۰ (۵)

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۲۹ (۲)

۲۶ (۱)

۲۲ نفر می‌خواهند با هم فوتبال بازی کنند. آن‌ها برای این کار باید به دو تیم ۱۱ نفری غیر نشان‌دار تقسیم شوند. منظور از غیر نشان‌دار این است که تیم‌ها نام و شماره اعضا ندارند. در حقیقت، تنها هم‌تیمی بودن و نبودن افراد مهم است. هر یک از این ۲۲ نفر به یک نفر دیگر علاقه دارد. به فرد مورد علاقه، **محبوب** او نیز می‌گوییم. طبیعی است که رابطه محبوب بودن لزوماً دوطرفه نیست! هر یک از این ۲۲ نفر از یک نفر دیگر متنفر است. به فرد مورد تنفر، **منفور** او نیز می‌گوییم. بالطبع رابطه تنفر نیز لزوماً دو طرفه نیست!

طبیعی است که کسی محبوب یا منفور خودش نیست! هم‌چنین یک نفر می‌تواند محبوب یا منفور بیش از یک نفر باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶- می‌خواهیم تیم‌کشی طوری انجام شود که هیچ‌کس با منفورش هم‌تیم نباشد. در میان تمام حالات برای روابط افراد، کمینه و بیشینه تعداد حالات تیم‌کشی به ترتیب چیست؟

۲^{۱۰} و ۰ (۵)

۱ و ۰ (۴)

۲^{۱۱} و ۱ (۳)

۲^{۱۱} و ۰ (۲)

۱ و ۱ (۱)

۱۷- می‌خواهیم تیم‌کشی طوری انجام شود که هر کس با محبوبش هم‌تیم باشد. در میان تمام حالات برای روابط افراد، بیشینه تعداد حالات تیم‌کشی چیست؟

۲۵۲ (۵)

۷۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

۰ (۲)

۷۰ (۱)

محسن یک دیگ بزرگ برنج و یک قاشق دارد. به او گفته می‌شود که تعدادی روز فرصت دارد تا برنج بخورد. تعداد دقیق روزها به محسن گفته نمی‌شود، اما به او گفته می‌شود این تعداد از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است. به عبارت دقیق‌تر محسن به احتمال $\frac{1}{n}$ دقیقاً یک روز فرصت دارد، به احتمال $\frac{1}{n}$ دقیقاً دو روز فرصت دارد، ... و به احتمال $\frac{1}{n}$ دقیقاً n روز فرصت دارد. محسن در هر روز می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

• تعداد قاشق‌هایش را دو برابر کند.

• هر قاشقش را پر از برنج کند و بخورد.

محاسبات و نکته‌های مهم





هرگاه فرصت محسن تمام شود، به او گفته می‌شود که پایان کار فرا رسیده است! محسن می‌خواهد روشی را در پیش بگیرد که امید ریاضی مجموع میزان برنجی که می‌خورد بیشینه شود. به عبارت دیگر او می‌خواهد روشی در پیش گیرد که به‌طور میانگین در میان n حالت موجود (برای تعداد روزهایی که فرصت دارد)، بیش‌ترین میزان برنج خورده شود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به سؤال زیر پاسخ دهید _____

۱۸- فرض کنید $n = 4$ باشد؛ یعنی به محسن گفته می‌شود تعداد روزهای فرصتش از مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ است. بیشینه امید ریاضی گفته شده چند قاشق برنج است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{17}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۴ (۵) ۸

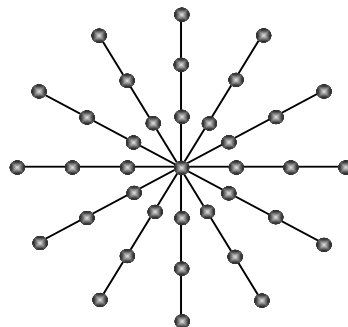
۱۹- فرض کنید $n = 20$ باشد؛ یعنی به محسن گفته می‌شود تعداد روزهای فرصتش از مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ است. بیشینه امید ریاضی گفته شده چند قاشق برنج است؟

- (۱) 2^{19} (۲) $\frac{21}{2}$ (۳) $\frac{3}{5} \times 2^{15}$ (۴) 2^{15} (۵) $\frac{3}{5} \times 2^{16}$

فرض کنید یک گراف ساده همبند داریم. فاصله دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. استاد بزرگ یکی از رأس‌های گراف را در ذهن خود انتخاب می‌کند و ما باید آن رأس را پیدا کنیم. ما در هر مرحله می‌توانیم یک رأس گراف را به استاد بزرگ بدهیم و او فاصله رأس ما تا رأس خودش را می‌گوید. کمینه تعداد مراحل که لازم داریم تا به طور تضمینی بتوانیم رأس استاد بزرگ را پیدا کنیم، عدد گراف می‌نامیم. لزومی ندارد در روند یافتن رأس استاد بزرگ، فاصله خود این رأس نیز از استاد بزرگ پرسیده شود.

_____ با توجه به توضیحات بالا به سؤال زیر پاسخ دهید _____

۲۰- عدد گراف زیر چیست؟



- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۰ (۵) ۹



محاسبات و نکته‌های مهم



۲۱- تمام گراف‌های ساده همبند را در نظر بگیرید که دقیقاً ۱۰۰ رأس و ۱۰۰ یال دارند. کمینه و بیشینه عدد گراف در میان گراف‌های گفته شده به ترتیب چیست؟

(۱) ۹۷ و ۱ (۲) ۹۸ و ۲ (۳) ۹۷ و ۲ (۴) ۹۸ و ۱ (۵) ۹۹ و ۱

۲۲- یک گراف ۱۳۹۶ رأسی با رأس‌های ۱، ۲، ... و ۱۳۹۶ داریم. در این گراف، دو رأس با شماره‌های i و j به هم وصل هستند، اگر و تنها اگر $10 \leq |i - j|$ باشد. عدد این گراف چیست؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۱۱ (۵) ۱۴۰

فرض کنید یک جدول داریم. دو خانه از جدول را مجاور گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به یک مجموعه از خانه‌های جدول همبند گوییم، اگر به ازای هر دو خانه آن مانند x و y بتوانیم از x شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه مجاور از آن مجموعه برویم و پس از تعدادی مرحله به y برسیم. می‌خواهیم خانه‌های جدول را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

- خانه‌های هر رنگ، یک مجموعه همبند تشکیل بدهند.
- شکل حاصل از خانه‌های سیاه و شکل حاصل از خانه‌های سفید، هم‌نهشت (قابل انطباق در صفحه با عملیات‌های انتقال، دوران و تقارن) باشند.

هدف ما پیدا کردن تعداد روش‌های انجام این رنگ‌آمیزی است. در این دسته سؤال، دو رنگ‌آمیزی را که با دوران، تقارن و اعمال مشابه از روی هم به دست بیایند، متفاوت در نظر می‌گیریم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳- تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را در یک جدول 8×2 بیابید.

(۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۸ (۵) ۶

۲۴- تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را در یک جدول 4×4 بیابید.

(۱) ۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴) ۵۲ (۵) ۴۴



محاسبات و نکته‌های مهم



۲۵- این بار فرض کنید یک مکعب $2 \times 2 \times 2$ داریم. دو مکعب واحد را مجاور گوییم، اگر یک وجه مشترک داشته باشند. به یک مجموعه از مکعب‌های واحد همبند گوییم، اگر به ازای هر دو مکعب واحد آن مانند x و y بتوانیم از x شروع کرده، در هر مرحله به یک مکعب واحد مجاور از آن مجموعه برویم و پس از تعدادی مرحله به y برسیم. می‌خواهیم مکعب‌های واحد را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

- مکعب‌های واحد هر رنگ، یک مجموعه همبند تشکیل بدهند.
- شکل حاصل از مکعب‌های واحد سیاه و شکل حاصل از مکعب‌های واحد سفید، هم‌نهیشت (قابل انطباق در فضا با عملیات‌های انتقال، دوران و تقارن) باشند.

تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را بیابید.

۳۸ (۵)

۱۴ (۴)

۲۶ (۳)

۳۲ (۲)

۴۰ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



رشته محسن ۲۵ امتیاز

محسن یک رشته n رقمی از حروف A, B, C دارد. او در هر مرحله می‌تواند دو حرف متوالی و متفاوت از رشته در نظر بگیرد و آن‌ها را با حرف سوم جایگزین کند. منظور از حرف سوم، حرفی از مجموعه $\{A, B, C\}$ است که در میان دو حرف گفته شده نیامده است. برای مثال محسن می‌تواند با تغییر حروف چهارم و پنجم (از سمت چپ) رشته $ABCBA$ آن را به $ABCCCA$ تبدیل کند. فرض کنید تعداد حروف A, B و C در رشته گفته شده به ترتیب a, b و c باشد. باقی‌مانده a, b و c در تقسیم بر ۳ را به ترتیب r_a, r_b و r_c در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر دست کم دو تا از سه عدد r_a, r_b و r_c برابر باشند، محسن می‌تواند با تعدادی مرحله تمام حروف رشته را برابر کند.

توابع سرخ ۲۵ امتیاز

یک زبان برنامه نویسی جدید داریم که در آن به پیاده‌سازی توابع می‌پردازیم. پیش از صحبت در مورد این زبان برنامه‌نویسی، مجموعه اعداد سرخ را تعریف می‌کنیم که برابر $\{0, 1, 2\}$ است. در این زبان برنامه‌نویسی فقط از اعداد سرخ استفاده می‌شود. به عبارت دیگر مقدار هر متغیر، هر عدد، هر ورودی، هر خروجی و ... فقط می‌تواند عدد سرخ باشد.

x	y	$b(x,y)$
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۰	۲	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۲
۱	۲	۲
۲	۰	۱
۲	۱	۲
۲	۲	۰

تنها تابع آماده این زبان، تابع $b(x,y)$ است. این تابع دو عدد سرخ از ورودی می‌گیرد و یک عدد سرخ در خروجی برمی‌گرداند. این تابع را با $b(x,y)$ نشان می‌دهیم. خروجی این تابع به شکل زیر محاسبه می‌شود:

- ابتدا عدد کم‌تر در میان x و y انتخاب می‌شود.
- عدد انتخاب شده با یک جمع می‌شود.
- حاصل تابع، باقی‌مانده عدد محاسبه شده در تقسیم بر ۳ است.

برای درک بهتر، خروجی تابع به ازای ورودی‌های مختلف در جدول روبه‌رو نوشته شده است.



محاسبات و نکته‌های مهم



هر برنامه در این زبا در قالب زیر نوشته می‌شود:

۱. در خط یکم برنامه، نام ورودی‌ها نوشته می‌شود. برای مثال، خط یکم برنامه‌ای با چهار ورودی می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد.

x y inp z

۲. در خط دوم برنامه، نام خروجی نوشته می‌شود. در این زبان هر برنامه فقط یک خروجی دارد. برای مثال، خط دوم یک برنامه می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد.

tmp\ tmp۲ t۴ a b

۳. در خط سوم برنامه، نام متغیرهای دیگری که در برنامه استفاده خواهد شد، نوشته می‌شود. برای مثال، خط سوم یک برنامه می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد.

tmp\ tmp۲ t۴ a b

۴. از خط چهارم به بعد برنامه، قالب کلی هر خط به شکل زیر است:

$$v \leftarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

که در آن v یک متغیر ورودی، متغیر خروجی یا از متغیرهای دیگر است. هم‌چنین f یک تابع از پیش تعریف شده با n ورودی است. هر کدام از a_i ها نیز باید یک عدد سرخ یا یک متغیر مقداردار باشند. برای مثال، خط دهم برنامه‌ای می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد (فرض کنید q یک تابع

$$t \leftarrow -g(r, x, r, x)$$

از پیش تعریف شده، x یک متغیر ورودی و r یک متغیر مقداردار است).

x	y	min(x,y)
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۲	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱
۱	۲	۱
۲	۰	۰
۲	۱	۱
۲	۲	۲

برای آشنایی بیشتر شما با این زبان یک مثال می‌زنیم. فرض کنید می‌خواهیم تابع $\min(x,y)$ را پیاده‌سازی کنیم که با گرفتن دو عدد سرخ از ورودی، عدد کم‌تر را در خروجی برمی‌گرداند. شکل دقیق عمل کرد این تابع در جدول روبه‌رو آمده است.





x y
z
t
 $t < -b(x, y)$
 $t < -b(t, t)$
 $z < -b(t, t)$

توجه کنید قبل از نوشتن این برنامه، هیچ تابع دیگری تعریف نشده و تنها می‌توانیم از تابع blanko استفاده کنیم. روش روبه‌رو، یک پیاده‌سازی برای تابع min است. پس از پیاده‌سازی تابع min، می‌توانیم از آن در برنامه‌های بعدی استفاده کنیم.

حال در هر یک از قسمت‌های زیر، باید به پیاده‌سازی تابع خواسته شده بپردازید. می‌توانید قبل از پیاده‌سازی توابع خواسته شده، توابعی دیگر را در برنامه‌هایی جداگانه به ترتیبی مشخص پیاده‌سازی کنید و از آن‌ها در برنامه‌های بعدی کمک بگیرید. برای هر تابعی که پیاده‌سازی می‌کنید، توضیح مختصری نیز ارائه دهید. توضیح تنها یا پیاده‌سازی تنها نخواهد داشت و هر دو باید با هم انجام شود.

(آ) تابع max را پیاده‌سازی کنید. این تابع دو ورودی می‌گیرد و عدد بیش‌تر را برمی‌گرداند. (۱۰ نمره)

x	y	$d_1(x, y)$	$d_3(x, y)$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۰	۲	۰	۲
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۲
۱	۲	۱	۰
۲	۰	۰	۲
۲	۱	۱	۰
۲	۲	۱	۱

(ب) دو تابع d_1 و d_3 را پیاده‌سازی کنید که هر کدام دو ورودی می‌گیرند و باید به شکل روبه‌رو کار کنند. در حقیقت با کنار هم گذاشتن حاصل‌های $d_1(x, y)$ و $d_3(x, y)$ برای یک x و y مشخص، حاصل جمع دو رقمی x و y در مبنای سه به دست می‌آید. (۱۵ نمره)

صفحهٔ سروش ۲۵ امتیاز

سروش روییک صفحه n خط راست کشیده است، طوری که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط، صفحه را به تعدادی ناحیه افراز کرده‌اند. ثابت کنید سروش می‌تواند در هر یک از ناحیه‌ها یک عدد صحیح بنویسد، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- اعداد نوشته شده دو به دو متمایز باشند.
- جمع چهار عدد ناحیه‌های مجاور هر نقطهٔ ناشی از برخورد خطوط برابر ۰ باشد.

محاسبات و نکته‌های مهم





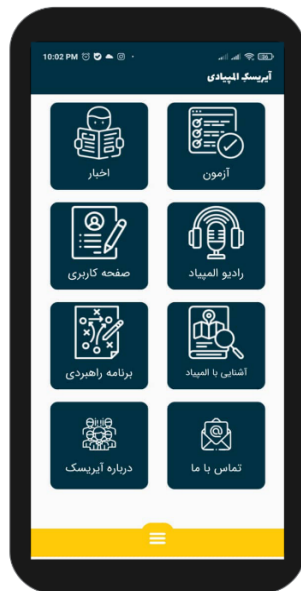
دوره‌های مرتبط ۲۵ امتیاز

فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ است. یک گراف ساده n رأسی داریم که هر دو دور آن، دست کم یک رأس مشترک دارند. بیشینه تعداد یال‌های این گراف را بر حسب n بیابید.



محاسبات و نکته‌های مهم





○ آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس‌های آنلاین

○ آزمون‌های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد آیریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad