

دفترچه سؤالات مرحله دوم

بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر - روز اول

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۳۹۷	۲۰	۱۸۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- ۱- کد دفترچه شما یک است. این کد را با کدی که روی پاسخ‌نامه نوشته شده است تطبیق دهید. در صورت وجود مغایرت، در سرعت وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگه پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۴- کلیه جواب‌ها باید در پاسخ‌نامه وارد شود. بدیهی است موارد مندرج در دفترچه سؤالات تصحیح نشده و به آن‌ها هیچ نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.
- ۵- نام و نام‌خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سؤالات و پاسخ‌نامه بنویسید.
- ۶- برگه پاسخ‌نامه شما را دستگاہ تصحیح می‌کند. پس از آن را تا نکنید و تمیز نگه‌دارید و به‌علاوه پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۷- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد.
- ۸- ترتیب گزینه‌ها به صورت تصادفی است. سؤالات ۱۲ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- ۹- همراه داشتن لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب می‌شود.
- ۱۰- شرکت‌کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می‌شوند.
- ۱۱- دفترچه سؤالات باید همراه با پاسخ‌نامه به مسئولین جلسه تحویل شود.



۱- تمام 10^3 سه‌تایی مرتب (a, b, c) از مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 10\}$ را در نظر بگیرید. این 1000 سه‌تایی مرتب در مجموع 3000 عدد دارند. از هر سه‌تایی مرتب بزرگ‌ترین عدد (یا اعداد) را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم. برای مثال از سه‌تایی مرتب $(1, 2, 3)$ اعداد 1 و 2 و از سه‌تایی مرتب $(1, 2, 2)$ عدد 1 حذف می‌شوند. مجموع اعداد باقی‌مانده چقدر است؟

۸۳۲۵ (۵)

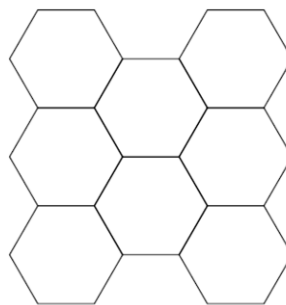
۸۷۷۵ (۴)

۱۰۲۵ (۳)

۷۷۷۸ (۲)

۹۰۷۵ (۱)

۲- می‌خواهیم اعداد 1 تا 8 را در خانه‌های شکل زیر بنویسیم. طوری که اعداد هر دو خانه مجاور (دارای ضلع مشترک) نسبت به هم اول باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟



۱۴۴ (۵)

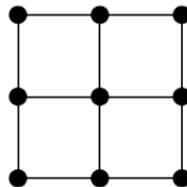
۴۳۲ (۴)

۵۷۶ (۳)

۲۸۸ (۲)

۲۱۶ (۱)

۳- به چند طریق می‌توان یال‌های گراف زیر را جهت‌دهی کرد، طوری که دور جهت‌دار تشکیل نشود؟



۲۷۲۲ (۵)

۲۳۹۸ (۴)

۱۶۶۰ (۳)

۵۰۸ (۲)

۵۷۶ (۱)

۴- در یک جدول 8×8 به هشت خانه که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند، قطر پراکنده می‌گوییم. به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول 8×8 را با اعداد 0 و 1 پر کرد طوری که هر قطر پراکنده آن دقیقاً چهار عدد 1 داشته باشد؟

$8!$ (۵)

۱۴۰ (۴)

۷۰ (۳)

0 (۲)

۴۹۰۰ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



۵- هشت مسافر در بازرسی بدنی یک فرودگاه به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۸ در صف ایستاده‌اند. سلطان مسئول بازرسی بدنی است. او هر بار فرد جلوی صف را بازرسی بدنی می‌کند، سپس به او اجازه می‌دهد از در وارد سالن فرودگاه شود. سلطان تنهاست و در هر لحظه می‌تواند فقط یک نفر را بازرسی بدنی کند. بنابراین در حین بازرسی هر نفر، ممکن است تعدادی (که می‌تواند صفر هم باشد) از افراد صف به ترتیب و بدون بازرسی وارد سالن شوند.

برای مثال فرض کنید سلطان در حال بازرسی فرد شماره ۱ است. در این حین ممکن است افراد ۲ و ۳ به ترتیب از در وارد سالن شوند. سپس فرض کنید بازرسی فرد شماره ۱ تمام شود و او از در سالن عبور کند. سلطان پس از این کار به سراغ بازرسی فرد شماره ۴ می‌رود و روند ادامه پیدا می‌کند.

افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند از در وارد سالن شوند؟

(۱) ۱۲۸ (۲) ۱۴۴ (۳) ۷! (۴) ۲۵۶ (۵) ۸!

۶- یک گراف کامل پنج رأسی با رأس‌های v_1 تا v_5 داریم. به چند طریق می‌توان یال‌های این گراف را با قرمز و آبی رنگ کرد، طوری که هم زیرگراف پنج رأسی متشکل از یال‌های آبی و هم زیرگراف پنج رأسی متشکل از یال‌های قرمز همبند باشد؟

(۱) ۴۳۲ (۲) ۸۶۴ (۳) ۲۱۲ (۴) ۲۹۶ (۵) ۵۹۲

۷- فرض کنید S رشته‌ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به این رشته تجزیه‌ناپذیر گوئیم، اگر رشته t وجود نداشته باشد که با گذاشتن تعدادی (بیش از یک بار) از آن کنار هم، رشته S به دست آید. تعداد رشته‌های تجزیه‌ناپذیر ۱۲ رقمی را بیابید.

(۱) ۴۰۰۲ (۲) ۴۰۹۶ (۳) ۴۰۱۲ (۴) ۴۰۲۰ (۵) ۴۰۳۲

۸- سلطان می‌خواهد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ بسازد. او در ابتدا عدد ۱ را می‌نویسد. سپس به ازای هر i به ترتیب از ۲ تا ۱۰ عدد i را به شکل زیر به جایگشت اضافه می‌کند:

فرض کنید جایگشت کنونی $\langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1} \rangle$ باشد. سلطان عدد i را به احتمال $\frac{1}{i}$ در ابتدای جایگشت، به احتمال $\frac{1}{i-1}$ بین π_1 و π_2 ، به احتمال $\frac{1}{i-2}$ بین π_2 و π_3 ، ... و به احتمال $\frac{1}{i-1}$ بین π_{i-2} و π_{i-1} می‌نویسد. همچنین سلطان به احتمال $\frac{1}{i-1}$ عدد i را در انتهای جایگشت کنونی (بعد از π_{i-1}) می‌نویسد.

محاسبات و نکته‌های مهم





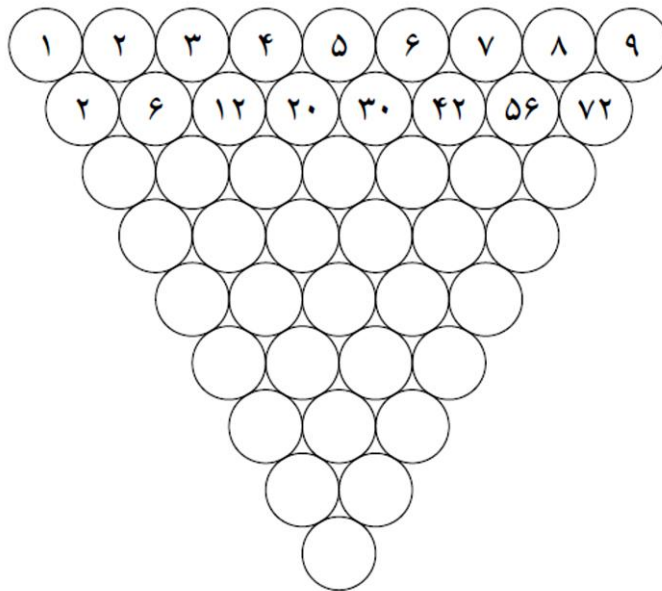
در جایگشت نهایی به دو عدد (نه لزوماً متوالی) وارون گوئیم، اگر عدد بزرگتر قبل از عدد کوچکتر آمده باشد. امید ریاضی تعداد زوج‌های وارون را بیابید.

$$(1) \quad \frac{\binom{10}{2}}{2} + \frac{1}{2^{10}} \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad \frac{\binom{10}{2}}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{2^9} + 1 - \frac{1}{2} \quad (5) \quad \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2}$$

۹- نقی دایره‌ای دارد که ۱۱ انگشتر دور آن چیده شده است. انگشترها از نظر ظاهری شبیه به هم هستند، اما در میان آن‌ها دقیقاً دو انگشتر اصل وجود دارد. نقی دستگامی دارد که در هر مرحله می‌تواند پنج انگشتر متوالی از دایره را به دستگاه نشان بدهد و تعداد انگشترهای اصل در میان این پنج انگشتر را بفهمد. نقی حق ندارد ترتیب انگشترهای دور دایره را عوض کند. او می‌خواهد دست کم یک انگشتر اصل را پیدا کند. نقی به دست کم چند بار استفاده از دستگاه نیاز دارد تا به طور مطمئن بتواند یک انگشتر اصل پیدا کند؟

$$(1) \quad 10 \quad (2) \quad 11 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 8 \quad (5) \quad 6$$

۱۰- در شکل زیر، هر عدد برابر ضرب دو عدد بالایی خود است. اعداد دایره‌های سطر سوم به بعد را در شکل ننویسید. عدد پایین‌ترین دایره چند رقم صفر در سمت راست خود دارد؟



$$(1) \quad 240 \quad (2) \quad 70 \quad (3) \quad 35 \quad (4) \quad 46 \quad (5) \quad 78$$



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۱- سلطان اعداد طبیعی ۱ تا n را با قرمز و آبی رنگ کرده است. می‌دانیم هیچ سه عدد هم‌رنگ و متمایزی وجود ندارد که عدد بزرگ‌تر برابر جمع دو عدد دیگر باشد. بیشینه ممکن برای n چیست؟

- ۷ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۸ (۵)

در خانه‌های یک جدول 8×8 اعدادی دوبه‌دو متمایز نوشته شده است. دو خانه از جدول را **هماهنگ** گوئیم، اگر در زیرجدولی که این دو خانه، دو گوشه مقابل آن را تشکیل می‌دهند، اعداد کمینه و بیشینه در همین دو خانه باشد.

«با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید»

۱۲- بیشینه ممکن تعداد زوج خانه‌های هماهنگ چیست؟

- ۴۴۸ (۱) ۳۳۶ (۲) ۱۲۳۲ (۳) ۷۸۴ (۴) ۵۶۰ (۵)

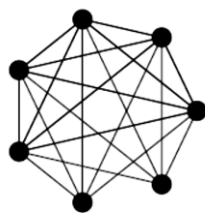
۱۳- کمینه ممکن تعداد زوج خانه‌های هماهنگ چیست؟

- ۴۴۸ (۱) ۵۶ (۲) ۱۷۶ (۳) ۲۲۴ (۴) ۱۱۲ (۵)

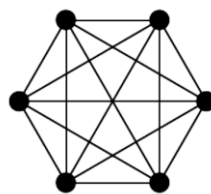
یک گراف ساده در نظر بگیرید که رأس‌های آن با قرمز و آبی رنگ شده‌اند. عمل **سلطان‌پیچ** روی گراف به این شکل انجام می‌شود که یک مجموعه از رأس‌ها مانند S را انتخاب می‌کنیم. سپس رنگ هر رأس خارج از S را که به تعداد فردی رأس از S یال دارد، عوض می‌کنیم.

«با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید»

۱۴- فرض کنید در ابتدا تمام رأس‌های گراف‌های زیر قرمز هستند. در کدام گراف‌ها می‌توان با تعدادی عمل سلطان‌پیچ تمام رأس‌ها را آبی کرد؟



گراف (ب)



گراف (ب)



گراف (آ)

۳) گراف (آ)

۲) هیچ‌کدام

۱) گراف‌های (آ) و (ب)

۵) هر سه گراف

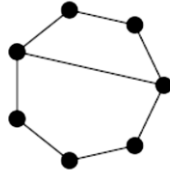
۴) گراف‌های (ب) و (پ)



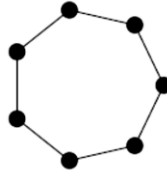
محاسبات و نکته‌های مهم



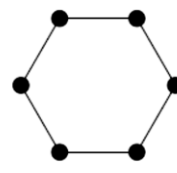
۱۵- گراف‌های زیر به ترتیب از راست به چپ ۲۶، ۲۷ و ۲۸ رنگ‌آمیزی اولیه ممکن دارند. در هر کدام به ترتیب از راست به چپ، به ازای چند رنگ‌آمیزی اولیه می‌توان با تعدادی عمل سلطان پیچ تمام رأس‌ها را آبی کرد؟



(۳) ۳۲، ۶۴، ۱۲۸



(۲) ۶۴، ۶۴، ۱۲۸



(۱) ۳۲، ۱۲۸، ۹۶

(۵) ۶۴، ۱۲۸، ۱۲۸

(۴) ۶۴، ۱۲۸، ۶۴

نواری نامتناهی به شکل زیر داریم:



در ابتدا ۱۰ قورباغه در ۱۰ خانه متوالی از این نوار قرار دارند. در یک عمل پرش، یک قورباغه یکی از دو جهت (چپ یا راست) را انتخاب می‌کند و با حرکت در جهت انتخاب شده، به نخستین خانه خالی می‌پرد. توجه کنید یک عمل پرش توسط یک قورباغه انجام می‌شود و قورباغه‌ها هم‌زمان نمی‌پرند.

«با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید»

۱۶- حداقل چند عمل پرش توسط قورباغه‌ها باید انجام شود تا بین هر دو قورباغه دست کم یک خانه خالی باشد؟

(۳) ۱۸

(۲) ۵

(۱) ۹

(۵) ۱۷

(۴) رسیدن به چنین حالتی ممکن نیست

۱۷- فرض کنید قورباغه‌ها شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داشته باشند. می‌خواهیم در انتها به وضعیتی برسیم که قورباغه‌ها در همین ۱۰ خانه‌ای قرار بگیرند که در ابتدا قرار دارند، اما ترتیب شماره‌های‌شان از چپ به راست صعودی باشد. حداقل چند عمل پرش لازم داریم تا به ازای هر ترتیب اولیه بتوانیم کارمان را انجام دهیم؟

(۵) ۲۰

(۴) ۱۹

(۳) ۱۱

(۲) ۱۰

(۱) ۱۵



محاسبات و نکته‌های مهم



در سرزمین سلطان نوعی باکتری به نام مملی زندگی می‌کند. هر مملی دو کروموزوم دارد. دو مملی می‌توانند با هم ازدواج و تولید مثل کنند. فرزند، از هر والد خود یک کروموزوم را به ارث می‌برد، بنابراین هر زوج حداکثر چهار فرزند متفاوت می‌توانند داشته باشند. بیماری‌ای در سرزمین سلطان شایع شده که برخی از کروموزوم‌ها آسیب دیده‌اند. تحقیقات پزشکی به موارد زیر رسیده است:

- یک مملی با دو کروموزوم آسیب‌دیده، ایدز دارد.
- یک مملی که کروموزوم آسیب‌دیده نداشته باشد، ایدز ندارد.
- وضعیت در مورد مملی‌هایی که دقیقاً یک کروموزوم آسیب‌دیده دارند مشخص نیست، ولی می‌دانیم یا همه آن‌ها ایدز دارند (که در این صورت به ایدز بیماری فراگیر می‌گوییم) و یا هیچ کدام ایدز ندارند.

جدول موروثی دو مملی، جدولی 2×2 می‌باشد که هر سطر آن مربوط به یک کروموزوم از مملی اول و هر ستون آن مربوط به یک کروموزوم از مملی دوم است. در هر خانه از جدول، وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن فرزندی که از کروموزوم‌های متناظر سطر و ستونش ساخته می‌شود، نوشته می‌شود. به راحتی می‌توانید بررسی کنید که دو جدول موروثی زیر، نامعتبر و غیرممکن هستند (علامت \checkmark به معنی داشتن ایدز و علامت \times به معنی نداشتن ایدز است):

\times	\checkmark
\checkmark	\times

\checkmark	\times
\times	\checkmark

بنابراین در کل $2^4 - 2 = 14$ جدول موروثی ممکن وجود دارد.

«با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید»

۱۸- دو مملی با هم ازدواج کرده و چهار فرزند مختلف به وجود آورده‌اند. به ما گفته‌اند دقیقاً k تا از این فرزندان ایدز دارند. ما هیچ اطلاعاتی دیگری

مانند این که والدین ایدز دارند یا خیر نداریم. به ازای چند مقدار k از ۰ تا ۴ می‌توانیم متوجه شویم ایدز یک بیماری فراگیر است یا خیر؟

۵ (۵)

۲ (۴)

۰ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۹- فرض کنید A و B دو مملی با جدول موروثی T باشند که سطرها مربوط به A و ستون‌ها مربوط به B است. فرض کنید وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن A و B را نمی‌دانیم. اگر با استفاده از جدول بتوانیم وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن هر دوی A و B را بفهمیم، دو امتیاز می‌گیریم؛ اگر بتوانیم فقط وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن یکی از آن‌ها را بفهمیم، یک امتیاز می‌گیریم و اگر هم هیچ کدام را نتوانیم بفهمیم، امتیازی نمی‌گیریم. تمام ۱۴ حالت T را در نظر بگیرید. در مجموع این حالات، چند امتیاز می‌توانیم بگیریم؟

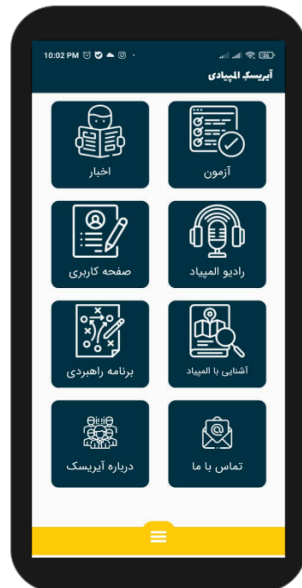
۲۸ (۱) ۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۸ (۵)

۲۰- سلطان دستگاهی ساخته که دو مملی از ورودی می‌گیرد و جدول موروثی آن‌ها را تحویل می‌دهد (حتی اگر دو مملی ازدواج نکرده باشند، با فرض ازدواج آن‌ها جدول را می‌سازد). فرض کنید A و B دو مملی با چهار فرزند مختلف و جدول موروثی T باشند. به ازای هر دو فرزند از A و B آن‌ها را به دستگاه می‌دهیم و یک جدول تحویل می‌گیریم. فرض کنید می‌دانیم هر خانه از T مربوط به کدام فرزند است. به ازای چند حالت از T ، با استفاده از $\binom{4}{2}$ جدول موروثی دستگاه و همچنین خود T می‌توانیم فراگیر بودن یا نبودن ایدز را تشخیص دهیم؟

۲ (۱) ۰ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۱۴ (۵)



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه‌ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع‌رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاس‌های آنلاین

○ آزمون‌های آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد ایریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad