

دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی و دومین المپیاد کامپیوتر

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۱	۲۰+۴	۲۱۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه‌های دفترچه سؤال مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- یک برگ پاسخ برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- کلیه جواب‌ها باید در پاسخ‌برگ وارد شود. پاسخ‌های نوشته شده در دفترچه سؤال تصحیح نشده و به آن‌ها هیچ امتیازی تعلق نخواهد گرفت.
- پاسخ برگ شما را دستگاه تصحیح می‌کند. پس آن را تا نکنید و تمیز نگه‌دارید و پاسخ هر سؤال را با مداد مشکی نرم در محل خانه مربوطه کاملاً سیاه کنید.
- نام و نام‌خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سؤال و پاسخ برگ بنویسید.
- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاب ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.
- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به صورت تصادفی است. سؤالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.
- دفترچه سؤال باید به همراه پاسخ‌نامه به مسئول مربوطه تحویل شود.



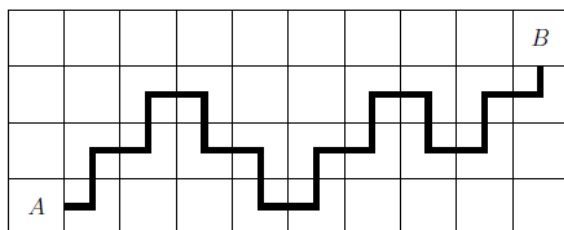
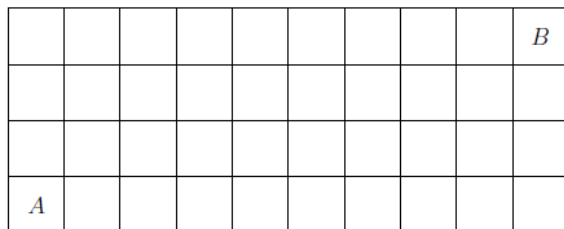
سؤالات تستی

- آزمون ۲۰ سؤال دارد و مدت زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- سؤالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.
- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال ۱ نمره منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.

۱- آقای مدیر در راستای صیانت از محیط زیست، رفته بود کلنگ احداث کارخانه‌ای در جوار تالاب پایان کاله را بزند که با پشه روبه‌رو شد. آقای مدیر به اصرار پشه برای نیش زدن پاسخ منفی داد اما به او گفت: مسئله‌ای داریم که اگر حل شود، دستور می‌دهم مشکل معیشت شما را هم برطرف کنند. ما در اینجا یک زمین داریم که به شکل یک جدول ۲۲×۱۴۰ است. در حال حاضر، همه خانه‌های این جدول را آب گرفته. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های جدول را خشک کنیم طوری که به ازای هر زیر مستطیل با بیش از یک خانه در این جدول، حداقل نصف خانه‌های آن زیر مستطیل خشک شده باشند. در راستای حمایت از جمعیت هم‌نوعان، پشه می‌خواهد تعداد خانه‌های خشک شده کمینه باشد. حداقل چند خانه از جدول باید خشک شوند؟

- (۱) ۲۱۲۴۱۱۱ (۲) ۲۱۲۴۶۱۶ (۳) ۱۸۸۸۵۴۸ (۴) ۱۴۱۶۴۱۱ (۵) ۹۴۴۲۷۴

۲- پشمک یک جدول ۴×۱۰ همانند شکل زیر دارد و می‌خواهد تعدادی لوله L- شکل در خانه‌های این جدول قرار دهد طوری که هر لوله داخل یک خانه قرار بگیرد و با طی کردن تعدادی لوله، از یکی از اضلاع خانه A به یکی از اضلاع خانه B مسیر وجود داشته باشد. پشمک دوست‌دار محیط‌زیست است و می‌خواهد با کمترین تعداد لوله این کار را انجام دهد. پشمک به چند طریق می‌تواند تعدادی لوله در این جدول قرار دهد طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و از A به B مسیر وجود داشته باشد؟ یک نمونه از لوله‌گذاری که در آن از ضلع راست A به ضلع پایین B مسیر وجود دارد، در جدول زیرین آمده است. دقت کنید که تعداد لوله‌ها در این مثال لزوماً کمینه نیست.



یک نمونه از لوله‌گذاری با ۱۷ لوله

- (۱) ۵۸ (۲) ۴۲ (۳) ۴۶ (۴) ۷۶ (۵) ۶۸



محاسبات و نکته‌های مهم



۳- سه نفر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دور دایره نشستند و با هم بازی می‌کنند. هر نفر دو کارت دارد که شماره افراد دیگر به جز خودش روی آن‌ها نوشته شده است. بازی از فرد با شماره ۱ شروع می‌شود. هر نفر در نوبت خود، از میان کارت‌هایی که در حال حاضر در اختیار دارد، یک کارت را به صورت تصادفی (با احتمال یکسان) انتخاب می‌کند و نوبت را به فردی که شماره‌اش روی کارت منتخب آمده است می‌دهد و آن کارت را دور می‌اندازد. بازی زمانی پایان می‌یابد که فردی که نوبتش است، هیچ کارتی نداشته باشد. پس از پایان بازی، امید ریاضی تعداد کل کارت‌های دور انداخته شده چقدر است؟


۴ (۵)

$\frac{11}{2}$ (۴)

۶ (۳)

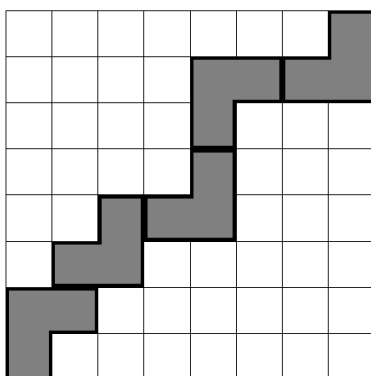
۵ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

۴- در مغازه آقا جلال، کاشی‌هایی به شکل  فروخته می‌شود. یک جدول 8×8 داریم. می‌خواهیم تعدادی کاشی بخریم و آن‌ها را طوری در جدل قرار دهیم که کاشی کاری معتبر باشد. یک کاشی کاری معتبر است اگر همه شرایط زیر را داشته باشد:

- هیچ دو کاشی‌ای هم‌پوشانی نداشته باشند.
- خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول حتماً کاشی کاری شده باشند.
- تنها با حرکت روی خانه‌های کاشی کاری شده جدول، بتوان از خانه پایین-چپ جدول شروع کرد، در هر مرحله به یک خانه مجاور ضلعی رفت، و در انتها به خانه بالا-راست جدول رسید.

با توجه به قیمت بالای کاشی‌های مغازه آقا جلال، می‌خواهیم تعداد کاشی‌هایی که می‌خریم کمینه باشد. به چند طریق می‌توان جدول را به صورت معتبر و با کمترین تعداد کاشی کاپش ممکن کاشی کاری کرد؟ لازم به ذکر است که دو کاشی کاری متفاوتند اگر و تنها اگر یک خانه از جدول وجود داشته باشد که فقط در یکی از این دو حالت کاشی کاری شده باشد. در شکل زیر، یک نمونه کاشی کاری معتبر نمایش داده شده است. توجه کنید که تعداد کاشی‌ها در این نمونه لزوماً کمینه نیست.



۲۲۴ (۱)

۲۵۶ (۲)

۱۲۸ (۳)

۹۶ (۴)

۱۹۲ (۵)



محاسبات و نکته‌های مهم



۵- دنباله‌ای از سیاه‌چاله‌ها در یک ردیف و به ترتیب با اندازه‌های «۳, ۱, ۵, ۲, ۳, ۵, ۸, ۲, ۳, ۲, ۸, ۴, ۵» در فضا قرار گرفته‌اند. می‌دانیم با ادغام تعدادی سیاه‌چاله، یک سیاه‌چاله جدید با اندازه‌ای برابر با مجموع اندازه سیاه‌چاله‌های اولیه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم یک بازه متوالی از یک یا چند سیاه‌چاله را انتخاب کنیم و با ادغامشان یک سیاه‌چاله بزرگ بسازیم؛ سپس تا جایی که اندازه سیاه‌چاله‌مان از اندازه یکی از سیاه‌چاله‌های همسایه (راست یا چپ) بزرگ‌تر یا مساوی است، آن را با ادغام با سیاه‌چاله همسایه، بزرگ‌تر کنیم. چند بازه متوالی متمایز از دنباله سیاه‌چاله‌ها وجود دارد که در صورت انتخاب برای ادغام اولیه، می‌توان با این فرایند همه سیاه‌چاله‌ها را با هم ادغام کرد؟

(۱) ۸۰ (۲) ۸۴ (۳) ۷۸ (۴) ۸۲ (۵) ۷۶

۶- جک یک عدد ۹ رقمی دارد که می‌خواهد آن را «پالایش» کند. فرایند پالایش به این صورت است که در هر مرحله، ارقام عدد فعلی به کمترین تعداد بازه متوالی تقسیم می‌شوند طوری که ارقام در هر بازه یکسان باشند. سپس برای ایجاد عدد جدید (جایگزین عدد فعلی)، به ازای هر یک از این بازه‌ها به ترتیب از چپ به راست، طول آن‌ها (تعداد ارقام در هر بازه) نوشته می‌شود. برای مثال، عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ بعد از یک مرحله پالایش به عدد ۱۲۱۱۴ تبدیل می‌شود. جک فرایند پالایش را تا وقتی که به یک عدد یک رقمی برسد ادامه می‌دهد. عدد یک رقمی نهایی چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ در مثال زیر، فرایند پالایش عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ را مشاهده می‌کنید که به عدد ۲ ختم می‌شود.

۱۲۲۳۱۸۸۸۸ → ۱۲۱۱۴ → ۱۱۲۱ → ۲۱۱ → ۱۲ → ۱۱ → ۲

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵) ۶

۷- یک گراف ساده و همبند ۱۱ رأسی داریم که می‌توان از هر رأس آن با طی حداکثر ۵ یال به هر رأس دیگر رسید. از طرفی دو رأس در این گراف وجود دارند که برای رسیدن از یکی به دیگری طی کردن حداقل ۵ یال لازم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۳۲ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) ۲۶ (۵) ۳۰

۸- کلاه قرمزی یک جدول 10×10 دارد که سطرها و ستون‌های آن از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند و در هر خانه آن دقیقاً یک سوراخ وجود دارد. بچه فامیل دور که ۸ تیله دارد، این جدول را پیدا کرده است. او به ازای هر تیله، یکی از خانه‌های جدول را به صورت تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می‌کند و تیله را در سوراخ آن خانه می‌اندازد (امکان دارد در سوراخ یک خانه، چندین تیله قرار بگیرد). حال اگر تعداد تیله‌های واقع در سوراخ خانه تقاطع سطر i ام و ستون j ام را با $c_{i,j}$ نمایش دهیم، زیبایی جدول با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} i \times j \times (c_{i,j})^2$$

امید ریاضی زیبایی جدول پس از انداختن ۸ تیله چقدر است؟

(۱) $\frac{۸۶۶۷}{۵۰}$ (۲) $\frac{۱۲۹۴۷}{۵۰}$ (۳) $\frac{۱۶۷۶۷}{۱۰۰}$ (۴) ۱۹۳۶ (۵) $\frac{۲۵۰۴۷}{۱۰۰}$



محاسبات و نکته‌های مهم



۹- یک گراف (\mathbb{Z}_6) رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته دودویی به طول ۲۶ با ۲۰ رقم صفر و ۶ رقم یک است. در این گراف، بین دو رأس متفاوت، یال (بدون جهت) می‌گذاریم اگر و تنها اگر رشته متناظر با یکی از آن‌ها با یک «شیفت دوری»، قابل تبدیل به رشته متناظر با رأس دیگر باشد. عملیات شیفت دوری روی یک رشته دودویی را این‌گونه تعریف می‌کنیم که راست‌ترین رقم رشته را حذف، و آن را در چپ‌ترین جایگاه رشته اضافه می‌کنیم. برای مثال، شیفت دوری رشته 1010100010 ، رشته 0101000101 را نتیجه می‌دهد. تعداد مؤلفه‌های همبندی این گراف را بشمارید.

۸۸۵۵ (۱) ۸۸۷۷ (۲) ۸۸۸۸ (۳) ۸۸۹۹ (۴) ۸۸۶۶ (۵)

۱۰- به یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ ملایم می‌گوییم اگر حاصل ضرب هر دو عدد متوالی در جایگشت، حداکثر ۳۰ شود. چند جایگشت ملایم از اعداد ۱ تا ۱۰ داریم؟

۱۷۲۸ (۱) ۲۸۸۰ (۲) ۳۴۵۶ (۳) ۵۷۶ (۴) ۱۴۴ (۵)

موشی و پیشی مشغول بازی با n کلید و n لامپ هستند. می‌دانیم که لامپ‌ها رنگ‌هایی متمایز دارند و هر کدام، همواره در یکی از دو وضعیت خاموش و روشن هستند. کلیدها نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و با فشردن هر یک، لامپ متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد. در ابتدای بازی، پیشی به طول دلخواه کلیدها را سیم‌کشی کرده و هر کدام از آن‌ها را به دقیقاً یک لامپ متصل می‌کند (ممکن است چند کلید به یک لامپ وصل شده باشند). سپس، موشی که از شیوه سیم‌کشی پیشی بی‌اطلاع است، در هر درخواست، دو تا از کلیدها را انتخاب و برای پیشی مشخص می‌کند. پیشی پس از گرفتن یک آب‌نبات از موشی، آن دو کلید را هم‌زمان فشار می‌دهد. با فشردن هر کلیدی، لامپ متصل به آن تغییر وضعیت می‌دهد؛ ولی اگر دو کلید فشرده شده به یک لامپ متصل بوده باشند، وضعیت لامپ‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. هدف موشی این است که بداند هر کلید به چه لامپی متصل شده است.

❖ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

۱۱- اگر $n=8$ باشد و پیشی تضمین کند که همه لامپ‌ها در سیم‌کشی به کلیدی متصل شده‌اند، موشی حداقل به چند آب‌نبات نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۴ (۱) ۲ هیچ کدام (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۵ (۵)

۱۲- اگر $n=5$ باشد و موشی مقدار نامحدودی آب‌نبات در اختیار داشته باشد، به ازای چند سیم‌کشی مختلف می‌تواند به هدفش برسد؟

۲۸۲۰ (۱) ۲۸۰۰ (۲) ۳۱۲۵ (۳) ۳۱۲۰ (۴) ۰ (۵)



محاسبات و نکته‌های مهم



پوپک پرستو مشغول انجام یک بازی هستند. بازی آن‌ها به این صورت است که ابتدا پوپک یک عدد طبیعی مانند k را انتخاب می‌کند با این شرط که $1 \leq k \leq 20$. سپس پرستو سعی می‌کند عدد پوپک را حدس بزند. پرستو می‌تواند از پوپک تعدادی پرسش کند. در هر پرسش، پرستو یک عدد طبیعی مانند n را به پوپک می‌گوید و پوپک باقیمانده تقسیم n بر k را به پرستو می‌گوید. هدف پرستو پیدا کردن عدد انتخاب شده توسط پوپک است.

با توجه به توضیحات بالا به سؤال ۲ زیر پاسخ دهید.

۱۳- کمترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱ (۵) ۲

۱۴- اگر اعدادی که پرستو می‌تواند بپرسد، حداکثر ۲۰ باشند ($1 \leq n \leq 20$)، کمترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۲ (۵) ۳

در کشور سلطان، ۱۳ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد که بین بعضی جفت‌های آن‌ها جاده خاکی وجود دارد. می‌دانیم که از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده خاکی به هر شهر دیگر رفت. همچنین می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده خاکی‌ای وجود ندارد. سلطان می‌خواهد تعدادی از جاده‌های خاکی کشورش را آسفالت کند طوری که کمترین تعداد جاده آسفالت شوند و بتوان تنها با استفاده از جاده‌های آسفالت شده بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ مسافرت کرد. فرض کنید نقشه جاده‌های خاکی را نمی‌دانیم اما می‌دانیم کمینه تعداد جاده‌هایی که باید آسفالت شوند برابر با k است. با دانستن مقدار k ، نقشه جاده‌های آسفالت شده چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

دو نقشه جاده‌های آسفالت شده را متفاوت در نظر می‌گیریم اگر دو شهر باشند که در یک نقشه، بین این دو شهر جاده آسفالت شده وجود داشته باشد و در نقشه دیگر خیر.

با توجه به توضیحات بالا به سؤال ۲ زیر پاسخ دهید.

۱۵- جواب سؤال را با فرض $k = 4$ به دست آورید.

- (۱) ۲۷۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۱۰۸۰ (۴) ۸۱۰ (۵) ۱۳۵

۱۶- جواب سؤال را با فرض $k = 12$ به دست آورید.

- (۱) $88 \times 10!$ (۲) $85 \times 10!$ (۳) $82 \times 10!$ (۴) $55 \times 10!$ (۵) $132 \times 10!$



محاسبات و نکته‌های مهم



$2k$ نفر با شماره‌های 1 تا $2k$ به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره نشسته‌اند و می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. افراد 1 تا k تیم اول، و افراد $k+1$ تا $2k$ تیم دوم را تشکیل می‌دهند. در ابتدا، توپی در دست نفر شماره 1 است. در هر نوبت، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به یکی از t نفر بعدی‌اش (در ترتیب ساعت‌گرد) می‌دهد. تیمی که بعد از n نوبت، توپ در دست یکی از اعضای آن باشد، برنده می‌شود. می‌گوییم به ازای مقادیر مشخص k, t, n ، یک تیم «استراتژی بُرد» دارد، اگر اعضای آن بتوانند در برابر هر شیوه‌ای از بازی تیم مقابل، طوری بازی کنند که حتماً برنده بازی شوند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

۱۷- اگر $k=2$ و $t=2$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعضای $\{1, 5, 6, 10\}$ ، تیم اول استراتژی برد دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲ (۵) ۳

۱۸- اگر $k=10$ و $t=2$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعداد 1 تا 30 ، تیم اول استراتژی برد دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰ (۵) ۲۰

گرافی با 1401 رأس و 1401 یال داریم که رأس‌های آن با اعداد 1 تا 1401 شماره‌گذاری شده‌اند. به ازای هر i ($1 \leq i \leq 1400$)، رأس‌های i و $i+1$ با یک یال به هم متصل هستند. رأس‌های با شماره‌های 1 و 1401 نیز با یک یال به هم متصل هستند. به مجموعه‌ای از رأس‌ها مستقل گوییم اگر هیچ یالی بین رأس‌های آن وجود نداشته باشد. به مجموعه مستقل با بیشترین اندازه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گفته می‌شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

۱۹- حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل یکی کمتر شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵) ۱

۲۰- حداقل یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل دو تا کمتر شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴ (۵) ۳



محاسبات و نکته‌های مهم



سؤالات تشریحی

سؤال اول ۱۸ نمره

یک جدول با ۱۴۰۱ سطر و ۳ ستون داریم. به خانه‌های تلاقی مجموعه‌ای از سطرهای متوالی و مجموعه‌ای از ستون‌های متوالی، یک زیرجدول می‌گوییم. در ابتدا ایمان به ازای هر سطر جدول، دقیقاً دو خانه از سه خانه را انتخاب می‌کند و داخل آن‌ها مهره قرار می‌دهد. سپس اسکندر در تعدادی حرکت، همه مهره‌های جدول را حذف می‌کند. او در هر حرکت، یک زیرجدول انتخاب می‌کند که تمام خانه‌های آن دارای مهره باشد و آن مهره‌ها را حذف می‌کند.

الف) ثابت کنید اسکندر همواره می‌تواند تمامی مهره‌ها را در حداکثر ۱۴۰۲ حرکت حذف کند. (۹ نمره)

ب) ثابت کنید ایمان می‌تواند در ابتدا طوری مهره‌ها را قرار دهد که اسکندر برای حذف همه آن‌ها حداقل ۱۴۰۲ حرکت لازم داشته باشد. (۹ نمره)

سؤال دوم (۱۸ نمره)

در یک زندان، ۳۲ نفر با اسامی متمایز در ۳۲ سلول زندانی هستند. زندان‌بان زندان عوض شده و زندان‌بان جدید می‌خواهد لیستی از اسامی ۳۲ زندانی تهیه کند. او برای این کار با زندانی‌ها توافق می‌کند که این بازی را انجام دهند: هر روز، ابتدا زندان‌بان دو سلول را انتخاب می‌کند؛ سپس با مراجعه به آن دو سلول، زندانی‌های هر کدام از آن دو سلول را می‌بیند و اگر هر یک از آن‌ها را قبلاً ندیده باشد، اسم آن فرد را هم به لیست خود اضافه می‌کند. همان شب و دور از چشم زندان‌بان، یکی از آن دو زندانی سلولش را با یکی از ۳۱ زندانی دیگر عوض می‌کند.

آیا زندان‌بان در هر شرایطی (به ازای تمام عملکردهای ممکن زندانی‌ها) می‌تواند در حداکثر ۱۰۲۴ روز؛ لیستی از اسامی همه زندانی‌ها را تهیه کند؟

توضیح: اگر پاسخ شما برای این سؤال «بله» است، باید روشی برای زندان‌بان ارائه کنید که در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیست اسامی زندانی‌ها را تهیه کند. همچنین اگر پاسخ شما برای این سؤال «خیر» است، باید اثبات کنید به ازای هر الگوریتم زندان‌بان، حالتی وجود دارد که او به هدفش نرسد.

سؤال سوم (۱۸ نمره)

تعدادی عدد متمایز دور یک دایره داریم که در ابتدا همه آن‌ها سفید هستند. یک عدد را دره می‌گوییم، اگر از هر دو عدد مجاورش کوچک‌تر باشد. همچنین یک عدد را قله می‌نامیم، اگر از هر دو عدد مجاورش بزرگ‌تر باشد.

روی اعداد به ترتیب از کوچک به بزرگ، عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

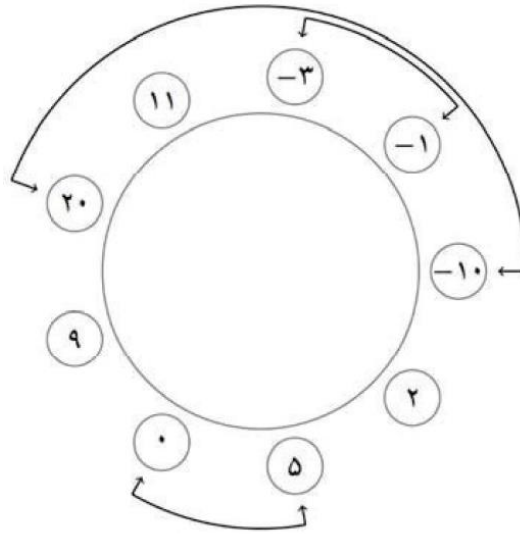
- اگر دره است، آن را سیاه می‌کنیم.
- اگر قله است، از این عدد به دو جهت حرکت می‌کنیم تا به اولین دره سیاه برسیم و از میان این دو دره سیاه عدد بزرگ‌تر را انتخاب کرده و با قله مذکور جفت می‌کنیم و دره‌ای که جفت شده را قرمز می‌کنیم. (اگر از دو جهت به یک دره سیاه یکسان رسیدیم، همان را انتخاب می‌کنیم).
- در غیر این صورت، کاری انجام نمی‌دهیم.

محاسبات و نکته‌های مهم





به این ترتیب، در نهایت دره‌ها و قله‌ها به جفت‌هایی افزای می‌شوند. در شکل زیر، افزای حاصل از اجرای الگوریتم در یک نمونه آمده است.



حال، هر عدد را با قرینه‌اش جایگزین کرده و الگوریتم گفته شده را با اعداد جدید اجرا می‌کنیم. ثابت کنید دو عدد در اجرای دوم الگوریتم جفت می‌شوند، اگر و تنها اگر اعداد متناظرشان (قرینه‌هایشان) در اجرای اول الگوریتم جفت شده باشند.

سؤال چهارم (۲۶ نمره)

فرض کنید n یک عدد طبیعی، و A زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n-1\}$ باشد. در یک درخت n رأسی، یک مسیر را A -پسند گوئیم، اگر طول (تعداد یال‌های) آن عضوی از A باشد. $f(n, A)$ را بیشینه تعداد مسیرهای A -پسند در میان تمام درخت‌های n رأسی در نظر بگیرید. برای مثال:

$$f(5, \{1, 2, 4\}) = 10 \quad \text{و} \quad f(5, \{1, 4\}) = 5$$

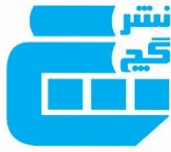
(الف) $f(2022, \{3, 4, 5, \dots, 140\})$ را بیابید. (۸ نمره)

(ب) $f(2022, \{3, 5, 7, \dots, 1399, 140\})$ را بیابید. (۵ نمره)

(پ) $f(2022, \{140\})$ را بیابید. (۱۳ نمره)



محاسبات و نکته‌های مهم



کلید المپیاد کامپیوتر

مرحله دوم ۱۴۰۱

غلط: صحیح:

فقط یک گزینه درست را برای هر سؤال با مداد سیاه تکمیل کنید:

۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input checked="" type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۳۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲ <input type="radio"/> ۱ <input checked="" type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۳۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input checked="" type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۳۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۳۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۵ <input checked="" type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۳۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۳۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۳۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۸ <input type="radio"/> ۱ <input checked="" type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۳۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۳۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input checked="" type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۴۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۴۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۲ <input checked="" type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۴۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input checked="" type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۴۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۴۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۵ <input type="radio"/> ۱ <input checked="" type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۴۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input checked="" type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۴۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۴۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input checked="" type="radio"/> ۵	۴۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۱۹ <input type="radio"/> ۱ <input checked="" type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۴۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۷۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۰۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input checked="" type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۱ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۲ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۳ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۴ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۵ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۶ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۷ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۸ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۲۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۵۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۸۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۱۹ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵
۳۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۶۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۹۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵	۱۲۰ <input type="radio"/> ۱ <input type="radio"/> ۲ <input type="radio"/> ۳ <input type="radio"/> ۴ <input type="radio"/> ۵

