

دفترچه سؤالات مرحله دوم

چهلمین و یکمین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۲	۶	۲۷۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.
- بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.



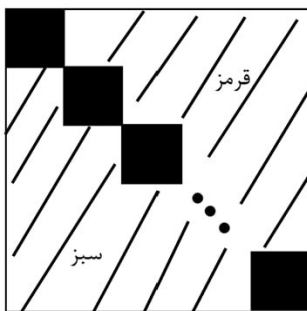
۱- در مثلث ABC می‌دانیم، $\angle A = 90^\circ$. نقطه‌ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می‌نامیم. PD ، خطوط AB ، AC را به ترتیب در E ، F قطع می‌کند. همچنین دایره‌های APE و APF به ترتیب BP را در X و CP را در Y قطع می‌کنند. ثابت کنید PD ، BY ، CX هم‌مرس هستند.

۲- ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $2 \leq n$ ، یک n -تایی مرتب (a_1, a_2, \dots, a_n) از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یکدیگر اول وجود دارد که همگی از 1402 بزرگ‌تر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$\left[\frac{a_1}{a_2} \right] + \left[\frac{a_2}{a_3} \right] + \dots + \left[\frac{a_n}{a_1} \right] = \left[\frac{a_2}{a_1} \right] + \left[\frac{a_3}{a_2} \right] + \dots + \left[\frac{a_1}{a_n} \right]$$

(منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که کوچک‌تر یا مساوی x باشد)

۳- یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، خانه سطر i -ام و ستون j -ام را با قاعده زیر رنگ می‌کنیم:



۱. اگر $i = j$ سیاه

۲. اگر $i < j$ قرمز

۳. اگر $i > j$ سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می‌نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n -تایی مرتب (a_1, a_2, \dots, a_n) را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n -تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n -تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

۴- عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه‌های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \dots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

محاسبات و نکته‌های مهم





۵- یک دنباله $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هرگاه برای هر n ، $P_{n+1} = P_n + Q$.

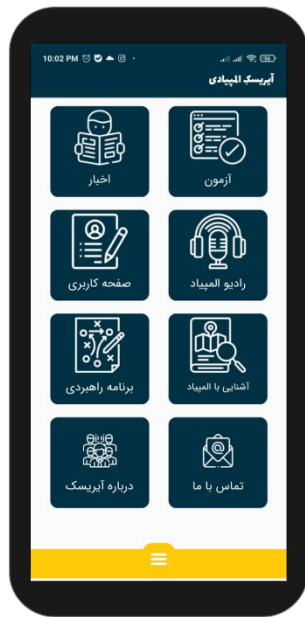
فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه صحیح دارد. ثابت کنید
 آ- $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

۶- دو دایره W_1, W_2 با شعاع‌های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره‌های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره‌های W_1 و W_2 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که $\angle CPQ = \angle CXQ$ و $\angle BPQ = \angle BYQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های XPC و YPB را S می‌نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS هم‌رس هستند.



محاسبات و نکته‌های مهم



○ آشنایی و برنامه ریزی المپیادهای علمی

○ اطلاع رسانی تمام اخبار المپیادی کشور

○ مشاوره و کلاسهای آنلاین

○ آزمونهای آنلاین المپیاد

○ معرفی منابع و فروشگاه کتاب آنلاین



برای دریافت، تصویر بالا را اسکن یا
"المپیاد ایریسک" را جستجو کنید.



@irysccom



@irysc



iran.olympiad