به نام خدایی که هست من است
گچ اکنون دوباره به دست من است

نردبان المپیاد ریاضی
جبر مرحله دوم

نویسندگان:

مهدی صفا

(مدال طلای کشوری و نقره جهانی المپیاد ریاضی)

میثم اسکندری

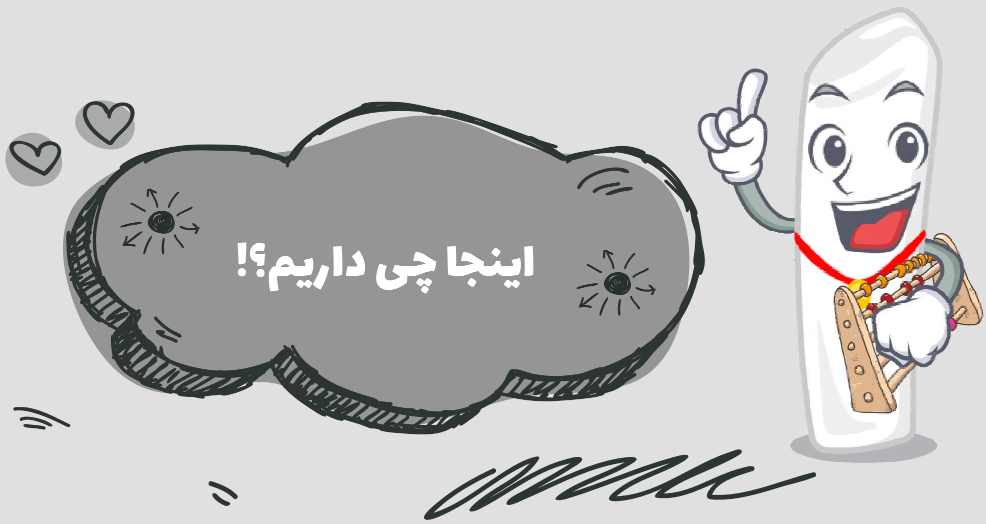
(مدال برنز کشوری المپیاد ریاضی)

سرشناسه	:	صفا، مهدی، ۱۳۵۹-
عنوان و نام پدیدآور	:	نردبان المپیاد ریاضی جبر- مرحله دوم/ نویسندگان مهدی صفا، میثم اسکندری ؛ سرگروه تالیف مرتضی خلینا ؛ رسم تصاویر فریده بحری‌نژاد.
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات گچ، ۱۴۰۲
مشخصات ظاهری	:	۲۷۲ ص. : مصور(رنگی)، جدول، نمودار.
شابک	:	۹۷۸-۶۲۲-۷۴۰۶-۳۲-۰
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	المپیادها (جبر) Olympiads (Algebra)
موضوع	:	جبر - - مسابقه‌ها- Algebra -- Competitions
موضوع	:	جبر - - مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع	:	Algebra -- Problems, exercises, etc.
شناسه افزوده	:	اسکندری، میثم ، ۱۳۷۱ -
شناسه افزوده	:	خلینا، مرتضی، ۱۳۶۲ -
شناسه افزوده	:	بحری‌نژاد، فریده، ۱۳۷۰- ، تصویرگر
رده بندی کنگره	:	LB ۳۰۶۰/۲۴
رده بندی دیویی	:	۲۳۸/۳۷۳
شماره کتابشناسی ملی	:	۹۵۲۴۴۱۹
اطلاعات رکورد کتابشناسی	:	فیپا

نردبان المپیاد ریاضی- جبر مرحله دوم

- مؤلفان: مهدی صفا- میثم اسکندری
- سرگروه تألیف: دکتر مرتضی خلینا
- مدیراجرایی: بهزاد تقوی مطلق
- نشر: انتشارات گچ
- حروف‌چینی و صفحه‌آرایی: فریده بحری‌نژاد
- رسم تصاویر: فریده بحری‌نژاد
- طراحی جلد: ماریا بحری‌نژاد
- نوبت و سال چاپ: اول- زمستان ۱۴۰۲
- شمارگان: ۱۲۰۰ نسخه
- قیمت: ۲۲۰۰۰۰ تومان
- شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۷۴۰۶-۳۲-۰

email: info@irysc.com | www.irysc.com | ۰۲۱۹۱۰۹۶۳۲۰


اینجا چی داریم؟!

یک سالِ المپیادی از اولین قدم تا مدال جهانی با آیریسک

ترم اول صفر تا بی‌نهایت
در یک فصل (هشـــت تا ده هفته)، حدود نی ی از مطالب مورد نیاز برای شرکت در مرحله اول و دوم ا پیادِ مورد نظر آموزش داده می‌شـــود.

ترم دوم صفر تا بی‌نهایت
در یک فصـــل (هشـــت تا ده هفته)، نیـــی دیگـــر از مطالب مورد نیاز بـــرای شـــرکت در مرحله اول و دوم ا پیادِ مورد نظر آموزش داده می‌شـــود و شـــا برای شرکت در هر دو آزمون آماده می‌شوید.

ماراتن‌های المپیادی
ماراتن‌های ا پیاد به صـــورت مبحثی و جامع (آنلاین و حضـــوری) در سراسر ایران برگزار می‌شـــود تا دانش‌پژوهان با تفکـــر در ایده‌های جدید، نقاط قوت خود را بشـــناسند و نقاط ضعف را در یک رقابت پرنشاط و پرجایزه برطرف کنند.

جمع‌بندی مرحله اول المپیاد
در بازه‌ی دو هفته مانده تا آزمون‌های مرحله اول، دوره‌های ج عبندی و حل سؤال برگزار می‌شود. این دوره برای دانش‌پژوهانی که مطالب ترم اول و دوم را مطالعه کرده‌اند، بســـیار مفید است و فوت‌های آخر کوزه‌گری را توســـط مدال‌آوران تازه‌نفس و با تجربه به ایشـــان می‌آموزد.

شبیه‌ساز المپیاد
آزمون‌های آزمایشـــی پر سابقه، با بزرگ‌ترین جامعه‌ی آماری کشـــور که ه یشـــه پر از سؤالات جدید و ایده‌های ناب بوده اســـت، شـــا را برای شرکت در آزمون‌های مرحله اول و دوم باشـــگاه دانش‌پژوهان جوان به طور کامل آماده مـــی‌کند.

اردوهای مبحثی پیشرفته
بعضی از مباحث ه یشـــه در سؤالات ا پیاد جا خوش کرده‌اند و هر چه بر این مطالب مســـلط‌تر باشید، موفقیت به شا نزدیک‌تر است برای این مطالب بـــرنامه‌های ویـــژه داریم. در دوره‌های کوتاه‌مدت با موفق‌ ترین ا پیادی‌های ایران ه راه باشـــید تا یک راه میانبرِ جدید پیدا کنید.

دوره برنز تا طلای کشوری
بعد از قبولی در مرحله‌ی دوم، ه چنان نیاز به آموزش هســـت تا رنگ مدالِ شا بهترین رنگ م کن باشد. در این دوره ه ـراهِ بچه‌های مدال‌آورِ ایـران هســـتیم تا مثل ه یشـــه بچه‌های آیریســـک خوش بدرخشـــند.

www.irysc.com

IRanian Young Scholars Club

این کتاب با هدف ایجاد یک متن آموزشی جامع و کامل برای مبحث جبر مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران نگاشته شده‌است. سعی نویسندگان بر آن بوده تا با استفاده از تجارب سال‌ها تحصیل و تدریس و تالیف در زمینه المپیاد ریاضی، و بهره‌گیری از آثار مکتوب سایر کشورهای دنیا در این حوزه، اثری ایجاد شود که پاسخ‌گوی همه نیازهای دانش‌پژوهان محترم المپیاد ریاضی کشور در درس جبر باشد.

از آن‌جایی که این کتاب برای آمادگی در مرحله دوم المپیاد ریاضی نگاشته شده، لازم هست پیش از شروع مطالعه این اثر، خواننده در حد مطالب مطرح در مرحله اول المپیاد ریاضی با مباحث آشنایی داشته باشد. برای نمونه کتاب جبر مرحله اول، نوشته مهدی صفا، از نشر گچ، پیش‌نهاد می‌شود.

ساختار کتاب

کتاب شامل سه بخش اصلی است که به ترتیب به مباحث نامساوی‌ها، توابع و چندجمله‌ای‌ها اختصاص یافته‌اند. بخش چهارم هم شامل راه‌حل‌های تمرین‌های پایانی هر فصل است. در هر فصل، ابتدا قضیه‌ها و گزاره‌های مورد نیاز با اثبات آورده شده‌اند. سپس مثال‌هایی ارائه شده که با مطالعه آن‌ها هم آموزش مطالب مورد هدف فصل محقق می‌شود و هم خواننده با ایده‌های مختلف به کارگیری مطالب آشنا خواهد شد. سعی شده مثال‌های فصل‌ها به ترتیب آسان به سخت مطرح شوند. پیش‌نهاد می‌شود دانش‌پژوهان محترم سعی کنند تا حد ممکن روی مثال‌ها فکر کنند. در پایان هر فصل هم تمرین‌هایی قرار داده شده که اکیدا توضیه می‌شود به منظور تعمیق آموخته‌ها و رشد قدرت حل مسئله خوانندگان، حتما ابتدا به اندازه کافی روی سوال‌ها فکر بشود و تنها در صورت ناامیدی کامل از حل هر سوال، به راه‌حل آن در بخش چهارم رجوع شود.

فصل‌های یک و دو به ترتیب به نامساوی‌های واسطه‌ها و کوشی–شوارتز اختصاص یافته‌اند. معمولا همین میزان اطلاعات برای حل سوال‌های نامساوی مرحله دو کفایت می‌کند، اما خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند نامساوی‌های جایگشتی و چبیشف و هولدر را در فصل سه مطالعه کنند. در فصل چهارم نیز برخی ایده‌های مورد استفاده در نامساوی‌ها به طور اختصاصی معرفی شده‌اند.

از فصل پنجم، بخش دوم کتاب، یعنی تابع آغاز می‌شود؛ که در آن به برخی مباحث پایه‌ای مربوط به توابع پرداخته‌ایم. در فصل‌های ششم و هفتم، به ترتیب توابع حقیقی و صحیح را به طور مجزا و مفصل مطالعه می‌کنیم. فصل‌های هشتم و نهم مربوط به نامساوی‌های تابعی و توابع سقف و کف هستند. این دو فصل از جمله مباحث منحصربه‌فرد این کتاب در بین آثار موجود در کشور هستند و در دور اول مطالعه کتاب می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد.

در بخش سوم سعی شده است مباحث مربوط به چندجمله‌ای‌ها در حد توان به صورت عمیق و مفصل ارائه شوند. طبق آخرین اطلاع نویسندگان، حتی در آثار بین‌المللی منتشر شده به زبان انگلیسی، معمولا در بخش چندجمله‌ای‌ها ضعف‌های زیادی مشاهده می‌شود. به همین خاطر بنا بر آن بوده تا در اثر پیش رو این خلاء متناسب با سطح و هدف این کتاب برطرف شود. در فصل دهم مفاهیم و مباحث پایه‌ای مربوط به چندجمله‌ای‌ها بررسی شده‌اند. چندجمله‌های با ضرایب صحیح اما به خاطر اهمین ویژه‌شان به طور مجزا در فصل یازدهم مطالعه شده‌اند. فصل پایانی و دوازدهم کتاب هم به معادلات چندجمله‌ای اختصاص یافته است.

در ادامه ذکر دو نکته ضروری است:

نکته اول: طبق توصیه ریاضی‌دان‌ها، و المپیادی‌های بزرگ سال‌های گذشته کشورمان، و نیز توصیه معلمین خوب المپیاد ریاضی و تجربه نویسندگان، بخش اعظم فرآیند یادگیری ریاضیات، با فکر کردن عمیق و طولانی روی مسائل و تمرین‌ها محقق می‌شود. هر چه بیش‌تر و عمیق‌تر روی مسئله‌ها فکر کنیم، هم یادگیری‌مان عمیق‌تر می‌شود و هم ایده‌های بهتر و زیباتری برای حل سوال‌ها نصیب انسان خواهد شد. به همین خاطر هرگز کیفیت مطالعه را فدای کمیت آن نکنید! و همیشه در نظر داشته باشید، زمانی که در حال فکر کردن روی مسئله‌ای هستید، اگر با وجود به کارگیری ایده‌های متعدد، مسئله حل نشود و خود را با بن‌بست مواجه ببینید، به هیچ عنوان وقت شما تلف نشده و بلکه دقیقا در همان زمان‌ها و پشت همان بن‌بست‌ها در حال رشد و پیش‌رفت بوده‌اید!

نکته دوم: نویسندگان حین نگارش و ویرایش اثر حاضر همواره تلاش کرده‌اند تا مطالب با کم‌ترین اشتباه ممکن در اختیار خوانندگان قرار بگیرد. اما با این وجود احتمالا مواردی بوده که تا زمان چاپ کتاب از نظرها دور مانده‌اند. ابتدا از همه خوانندگان محترم بابت این اشتباه‌های باقی‌مانده احتمالی عذرخواهیم و ممنون خواهیم بود اگر این اشتباهات و هرگونه نظر یا انتقاد یا پیشنهاد خود را درباره این اثر از طریق آیریسک (irysc.com) با ما درمیان بگذارید تا انشاءالله در نسخه‌های بعدی مدنظر قرار بگیرند. همچنین برای ارتباط مستقیم با مولفین، سایت و آدرس ایمیل زیر پیش‌بینی شده‌اند:

risheyema.ir

risheyema.inst@gmail.com

در آینده برخی محتواهای تکمیلی در زمینه المپیاد ریاضی نیز روی سایت قرار خواهد گرفت.

در پایان توفیق و رشد و پیش‌رفت و موفقیت در همه جنبه‌های زندگی را برای همه خوانندگان محترم این کتاب از خداوند منان خواستاریم. امید است این اثر گامی هر چند کوچک باشد در راستای رشد و بروز استعدادهای دانش‌آموزان عزیز میهن‌مان.

نویسندگان — زمستان ۱۴۰۲

پیشنهاد کتاب از زبان دکتر امیر جعفری[1]

ریاضیات از قدیمی‌ترین علوم بشری است که قرن‌ها ذهن باهوش‌ترین انسان‌ها را به خود مشغول کرده است. تقسیم ریاضیات به دو دسته ریاضیات دانشگاهی و ریاضیات دبیرستانی به نظر من تقسیم‌بندی خوبی نیست. ریاضیات، ریاضیات است؛ چه در سطح دبیرستان و چه در سطح دانشگاه! و نیز ریاضیات مبتذل، هم در سطح دبیرستان وجود دارد و هم در سطح دانشگاه. همان‌طور که ریاضیات اصیل و ارزشمند نیز هم در سطح دبیرستان وجود دارد و هم در سطح دانشگاه. یک ریاضیدان خوب در دبیرستان شروع به ساخته‌شدن می‌کند و برای این منظور به منابع ناب و مسائل مبارزه‌طلب نیاز دارد. اگر به شرکت‌کنندگان دوره‌های گذشته المپیادهای ریاضی نگاه کنیم متوجه خواهیم شد که بسیاری از ریاضیدانان تراز اول (مانند پروفسور مریم میرزاخانی) از بین آن‌ها بوده‌اند. بنابراین تولید محتوای با ارزش برای دانش‌آموزان در مدارس که عطش یادگیری دارند، از واجبات است. در همین راستا، کتاب جبر آقایان میثم اسکندری و مهدی صفا با دقت فراوان در انتخاب مطالب و مسائل تهیه شده و می‌تواند برای نسل نوجوان تشنه یادگیری منبع خوبی باشد.

جبر که خود بخش بسیار بزرگی از ریاضیات اصیل محسوب می‌شود، بسیار گسترده است و داشتن یک پیش‌زمینه قوی در آن برای کسانی که میخواهند بطور جدی در ریاضیات کار کنند الزامی است.

کتاب پیش رو برای برداشتن قدم‌های نخستین در این راه مفید است، هر چند که بخش بسیار بسیار کوچکی از این حیطه گسترده از ریاضیات را در بر می‌گیرد.

به امید اینکه توجه به تهیه چنین منابعی در سطح دبیرستان فراگیر شود.

امیر جعفری– بهمن ماه ۱۴۰۲

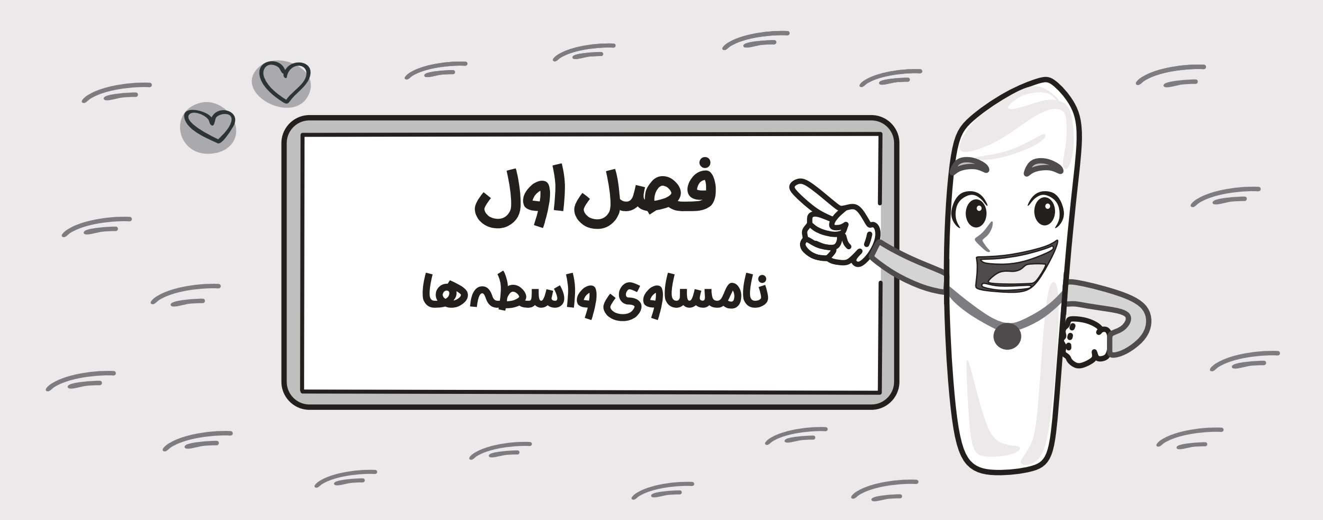
دانشگاه صنعتی شریف

۱ - دارنده مدال نقره المپیاد ریاضی جهانی سال ۱۹۹۲ و عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

۱

نامساوی‌ها

بخش اول کتاب نردبان المپیاد ریاضی جبر مرحله دوم را با نامساوها شروع کرده‌ایم و فصل اول نامساوی‌ها را به نامساوی‌های واسطه و مخصوصاً نامساوی حسابی- هندسی اختصاص داده‌ایم. در کتاب جبر مرحله اول از همین مجموعه، با خواص اصلی نامساوی‌ها و نیز نامساوی‌های واسطه آشنا شده‌اید و چندین مثال هم حل شده است. در این کتاب که مخصوص مرحله دوم المپیاد ریاضی است، سؤالات مشکل‌تر و جالب‌تری را بیان و اثبات خواهیم کرد.



شاید بتوان گفت نامساوی‌های چندگانهٔ واسطه، ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین ابزاری باشد که دانش‌آموزان در حل مسائل نامساوی از آن‌ها استفاده می‌کنند، به عبارت دیگر در غالب موارد، اولین تلاش برای حل یک مسئله نامساوی به این واسطه‌ها منجر می‌شود. با مثال‌های زیر که اثبات نامساوی حسابی- هندسی در حالات ۳ و ۴ تایی هستند شروع می‌کنیم.

مثال ۱-۱

اگر a، b و c سه عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

و تساوی هنگامی است که $a=b=c$.

راه‌حل: همان‌طور که در کتاب مرحله اول هم مشاهده شد تغییر متغیّر زیر می‌تواند مؤثر باشد:

$a=x^۳$, $b=y^۳$, $c=z^۳$ که در آن x، y و z سه عدد حقیقی هستند. لذا باید ثابت کرد:

$$x^۳+y^۳+z^۳ \geq ۳xyz$$

با توجه به اتحاد اویلر داریم:

$$x^۳+y^۳+z^۳=(x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx)+۳xyz$$

پس:

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz=(x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx)$$

یعنی باید ثابت کنیم:

$$(x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx) \geq ۰$$

امّا $(x+y+z) \geq ۰$، پس کافی است ثابت کنیم:

$$(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx) \geq ۰$$

که اگر به خاطر داشته باشید این حکم، در کتاب مرحله اول اثبات شده و از تکرار رابطه $x^۲+y^۲ \geq ۲xy$ به دست می‌آید و تساوی زمانی است که $x=y=z$ یا معادلاً $a=b=c$. ■

این مسأله نشان می‌دهد که برای سه عدد مثبت a، b و c خواهیم داشت:

واسطهٔ هندسی $\geq$ واسطهٔ حسابی

مثال ۱-۲

برای چهار عدد حقیقی و مثبت a، b، c و d ثابت کنید:

$$\frac{a+b+c+d}{۴} \geq \sqrt[۴]{abcd}$$

راه‌حل: برای اثبات این مثال، دو بار از نامساوی $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\frac{a+b+c+d}{۴} = \frac{\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}}{۲} \geq \sqrt{\frac{a+b}{۲}\times\frac{c+d}{۲}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\times\sqrt{cd}} = \sqrt[۴]{abcd} \quad . \blacksquare$$

آیا می‌توان این حکم را تعمیم داد؟ یعنی به عبارت دیگر آیا این نکته درست است که واسطهٔ حسابی n عدد مثبت حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی است از واسطهٔ هندسی آن‌ها؟

قضیه ۱-۱. (نامساوی حسابی – هندسی)

فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، . . . و a_n، n عدد حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_۱\, a_۲ \ldots a_n}$$

توضیح: این نامساوی که به نامساوی میانگین حسابی- هندسی مشهور است، اثبات‌های متعدّدی دارد. در اینجا یک اثبات که جالب‌تر از سایر اثبات‌ها به نظر می‌رسد را بیان می‌کنیم:

همان‌طور که می‌دانید استقراء ریاضی یکی از اصول مهم در ریاضیّات است و انواع مختلفی هم دارد، یکی از کارآمدترین آن‌ها بنام «استقراء قهقرایی» مشهور است که بدین ترتیب عمل می‌کند:

فرض کنید بخواهیم حکمی را برای مجموعهٔ اعداد طبیعی اثبات کنیم:

۱) ابتدا این حکم را برای پایهٔ استقراء یعنی اعداد ابتدایی ثابت می‌کنیم.

۲) فرض کنید $x_۱ < x_۲ < x_۳ < \cdots$ دنبالهٔ صعودی و نامتناهی از اعداد طبیعی باشد. سپس این حکم را برای مجموعهٔ $\{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$ که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ است اثبات می‌کنیم.

۳) فرض می‌کنیم که حکم به ازای m دلخواه از اعداد طبیعی درست باشد، آنگاه نشان می‌دهیم این حکم برای $m-۱$ هم درست می‌باشد.

بدین ترتیب به راحتی مشاهده می‌شود که حکم مورد نظر را برای کل اعداد طبیعی اثبات کرده‌ایم.

❖ اثبات قضیه‌ی ۱-۱:

اثبات بر پایهٔ «استقراء قهقرایی» می‌باشد: (استقراء روی n = تعداد متغیرها)

۱) برای حالت‌های $n=۲,۳$ اثبات را قبلاً آورده‌ایم

۲) برای دنبالهٔ $x_i = ۲^i$ که $i = ۱,۲,۳, \ldots$، حکم فوق را اثبات می‌کنیم. خود این حکم هم با استقرای ساده قابل اثبات است. حالت‌های $n = x_۱$ و $n = x_۲$ را قبلاً اثبات کرده‌ایم.

فرض کنید برای اعداد $۲,۲^۲,۲^۳, \ldots, ۲^{n-۱}$، قضیه را ثابت کرده‌ایم برای ۲^n داریم:

اعداد $a_۱$، $a_۲$، . . . و $a_{۲^n}$ را در نظر می‌گیریم باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۲^n}}{۲^n} \geq \sqrt[۲^n]{a_۱ a_۲ \cdots a_{۲^n}}$$

طبق حالت $۲^{n-۱}$ داریم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۲^{n-۱}}}{۲^{n-۱}} \geq \sqrt[۲^{n-۱}]{a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_{۲^{n-۱}}} \qquad (۱)$$

$$\frac{a_{۲^{n-۱}+۱} + \cdots + a_{۲^n}}{۲^{n-۱}} \geq \sqrt[۲^{n-۱}]{a_{۲^{n-۱}+۱} \times \cdots \times a_{۲^n}} \qquad (۲)$$

از جمع کردن روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۲^n}}{۲^{n-۱}} \geq \sqrt[۲^{n-۱}]{a_۱ a_۲ \cdots a_{۲^{n-۱}}} + \sqrt[۲^{n-۱}]{a_{۲^{n-۱}+۱} \cdots a_{۲^n}}$$

قرار دهید $A = \sqrt[۲^{n-۱}]{a_۱ a_۲ \ldots a_{۲^{n-۱}}}$ و $B = \sqrt[۲^{n-۱}]{a_{۲^{n-۱}+۱} \cdots a_{۲^n}}$

لذا داریم:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۲^n}}{۲^n} \geq \frac{A+B}{۲}$$

امّا با توجه به حالت خاص این نامساوی برای $n = ۲$ داریم $\frac{A+B}{۲} \geq \sqrt{AB}$ پس:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۲^n}}{۲^n} \geq \sqrt{AB} = \sqrt[۲^n]{a_۱ a_۲ \cdots a_{۲^n}}$$

پس تاکنون برای اعداد $n = ۲,۴,۸, \ldots$ حکم مسأله اثبات شده است.

۳) در مرحلهٔ آخر ثابت می‌کنیم اگر این قضیه برای m متغیّر درست باشد آنگاه برای هر $m-۱$ متغیّر دیگر هم درست است. پس فرض کنید می‌خواهیم برای اعداد $b_۱$، $b_۲$، . . . و $b_{m-۱}$ ثابت کنیم:

$$\frac{b_۱ + b_۲ + \cdots + b_{m-۱}}{m-۱} \geq \sqrt[m-۱]{b_۱ b_۲ \cdots b_{m-۱}}$$

با این فرض که برای هر m عدد دلخواه a_1، a_2، . . . و a_m همواره داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$$

برای اثبات حکم این m عدد دلخواه را این‌گونه قرار می‌دهیم:

$$a_1=b_1 \quad , \quad a_2=b_2 , \ldots , a_{m-1}=b_{m-1} \quad , \quad a_m=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1}$$

پس داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}+\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1}}{m}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1}$$

و داریم:

$$\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}=\sqrt[m]{b_1\,b_2\cdots b_{m-1}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1}}$$

امّا برای m داشتیم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$$

پس:

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1} \geq \sqrt[m]{b_1\,b_2\cdots b_{m-1}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1}}$$

که معادل عبارت

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1}\right)^{m-1} \geq (b_1\,b_2\cdots b_{m-1})$$

می‌باشد که همان

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{m-1}}{m-1} \geq \sqrt[m-1]{b_1\,b_2\cdots b_{m-1}}$$

است. پس ما برای هر $m-1$ عدد b_1، b_2، . . . و b_{m-1} حکم مسأله را اثبات کردیم. به این ترتیب سه مرحلهٔ یک «استقرای قهقرایی» تکمیل شده است و حکم قضیه برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست می‌باشد. ■

◈ قضیه ۱-۲. (نامساوی‌های واسطه)

اگر a_1، a_2، . . . و a_n، n عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\,a_2\cdots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$$

توضیح: همان‌طور که مشاهده می‌شود، قضیهٔ ۱-۱، زیرمجموعه‌ای از این قضیه است، به عبارت دیگر این قضیه بیان می‌کند که برای هر n عدد a_1، a_2، . . . و a_n داریم:

واسطهٔ مربعی $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq$ واسطهٔ حسابی $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq$

واسطهٔ توافقی $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq$ واسطهٔ هندسی $(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq$

❖ اثبات قضیه‌ی ۱-۲:

همان‌طور که مشاهده می‌شود این قضیه شامل سه نامساوی است:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (1)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (2)$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad (3)$$

نامساوی شمارهٔ (۲) را که همان قضیهٔ ۱ در همین فصل می‌باشد، قبلاً اثبات کردیم. برای اثبات نامساوی شمارهٔ (۳) از نامساوی واسطهٔ حسابی- هندسی کمک می‌گیریم:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n}\right)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

اثبات نامساوی شمارهٔ (۱): با مجذور کردن طرفین و پس از ساده‌سازی به این صورت تبدیل می‌شود:

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

برای اثبات نامساوی بالا کافی است عبارت $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$ را به شکل $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{n-1}a_n$ نوشت. و از طرفین یک عبارت $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ را ساده نماییم و به رابطه زیر برسیم:

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$$

که با توجه به رابطهٔ $a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_ia_j$ برای هر $1 \leq i < j \leq n$، و جمع همهٔ این روابط، به راحتی حکم به دست می‌آید. ■

حال برای درک بهتر موضوع، چند مسأله را که با این واسطه‌ها قابل اثبات است، می‌آوریم، هر چند که کاربرد این نامساوی‌ها در حل مسایل بسیار زیاد است و این مثال‌ها تنها پاره‌ای از این مسایل می‌باشند.

مثال ۱-۳

برای اعداد مثبت $a_۱$، $a_۲$، . . . و a_n ثابت کنید:

$$(a_۱+a_۲+\dots+a_n)\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\dots+\frac{۱}{a_n}\right)\geq n^۲$$

راه‌حل اوّل: با ضرب کردن طرف چپ نابرابری و دسته‌بندی آن را به این شکل می‌نویسیم:

$$n+\left(\frac{a_۱}{a_۲}+\frac{a_۲}{a_۱}\right)+\dots+\left(\frac{a_{n-۱}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-۱}}\right)\geq n^۲$$

دقّت کنید تعداد جملات در عبارت فوق برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$ می‌باشد.

در ضمن از قبل رابطه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$ را اثبات کرده‌ایم. پس هر کدام از جملات $\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}$ بزرگ‌تر یا مساوی ۲ هستند و چون $\frac{n(n-۱)}{۲}$ جمله داریم می‌توان نوشت:

$$n+\left(\frac{a_۱}{a_۲}+\frac{a_۲}{a_۱}\right)+\dots+\left(\frac{a_{n-۱}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-۱}}\right)\geq n+۲\times\frac{n(n-۱)}{۲}=n+(n^۲-n)=n^۲$$

و حکم مسأله اثبات می‌شود. ■

راه‌حل دوم: با توجه به قضیهٔ ۱-۲ داریم «واسطهٔ توافقی $\leq$ واسطهٔ حسابی» لذا:

$$\frac{a_۱+a_۲+\dots+a_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\dots+\frac{۱}{a_n}}$$

که با ساده کردن به همان خواستهٔ مسأله تبدیل می‌شود. ■

مثال ۱-۴

برای عددهای حقیقی و مثبت a، b و c نشان دهید:

(الف) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq ۶$

(ب) $\frac{a+b+c}{۳}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{۳}}\geq\sqrt[۳]{abc}$

راه‌حل: (الف). ابتدا هر کدام از سه کسر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم

$$\frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\quad,\quad\frac{c+a}{b}=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\quad,\quad\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}$$